A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1977. ÉVI XXIV. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

A szerkesztő postájából 2/52

Bereznai Gyula: Újabb bizonyítás a számtani-mértani közép egyenlőtlenségre 3/82

C. Nemenyi Eszter: Az általános iskolák 1978-ban bevezetendő új matematika-tantervéről . 3/65

Csillay Gyuláné: Új matematika-tantervek a dolgozók általános iskoláiban 3/87

Gádor Endréné: Rövid beszámoló a 3. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról 1/22

Helyesbítés 4/115

Hódi Endre: Beszámoló a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpiáról 4/99

Hódi Endre: Megemlékezés Carl Friedrich Gaussról 4/10

László Erzsébet: Vigyázat, zérus! 1/6

Dr. Molnár József: A hasonlóság témakörének feldolgozása 1/14

Molnár Zoltánné: Matematika-felvételi tanító szakon 3/80

Oláhné dr. Erdélyi Mária: Az 1777-es Ratio Educationis 3/75

Pálfy Sándor: A Kis Matematikus Baráti Körök 5. országos versenye 1/1; 2/33

Dr. Rédling Elemér: A hasonlóság fogalmainak kialakításáról 2/43

Részletek egy Pollák Györgytől érkezett levélből 3/67

Szabó Kálmán: Algebrai egyenlőtlenségek megoldása geometriai úton 4/112

Szikszai József: Hozzászólás A Matematika Tanítása egy cikkéhez 2/41

Dr. Urbán János: A szovjet matematikatanítás reformjáról 4/97

Dr. Urbán János: Néhány gondolat a függvények középiskolai tanításáról 2/38

Dr. Varga Tamás: Relációk és függvények 3/69

Vigassy Lajos: A négyzetes gúláról 3/84

FELADATOK 1/24; 2/55; 3/89; 4/116

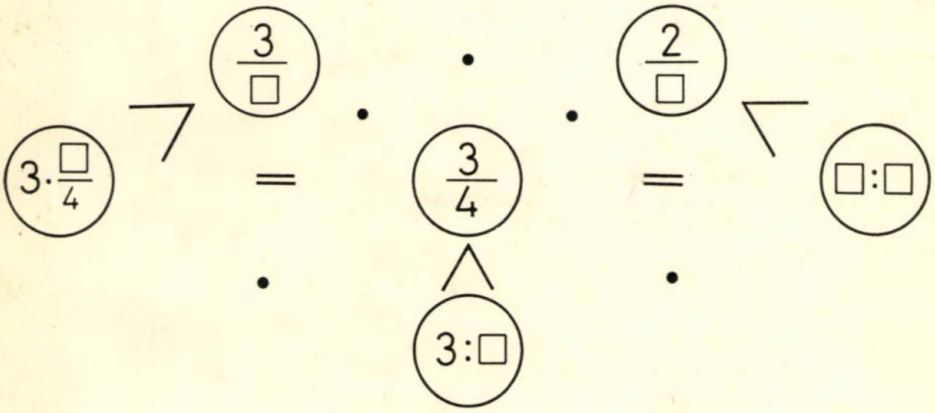
KÖNYVISMERTETÉS 2/III; 3/96; 4/128

1978-68 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

Szolnok * MEGYEI KÖNYVTÁR *



1977. február * XXIV. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 228-238.
76-5286 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI, Budapest V., József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 14 Ft. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy a közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek. A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

СОДЕРЖАНИЕ

Шандор Пальфи: Пятое общегосударственное соревнование Дружеских Кружков Молодых Математиков 1
Эржебет Ласло: Внимание, ноль! 6
Д-р. Йожеф Мольнар: Разработка темы «Подобия» 14
Эндренэ Гадор: Короткий отчёт о 3-ем Международном Конгрессе Обучения Математике 22
ЗАДАЧИ 24

TARTALOM

Pálfy Sándor: A Kis Matematikus Baráti Körök (KMBK) 5. országos versenye I. 1
László Erzsébet: Vigyázat, zérus! 6
Dr. Molnár József: A hasonlóság témakörének feldolgozása 14
Gádor Endréné: Rövid beszámoló a 3. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról 22
FELADATOK 24

INHALT

Pálfy, Sándor: 5. Nationaler Wettbewerb der Zirkel Junger Mathematiker 1
László, Erzsébet: Achtung! Achtung! Zero! 6
Dr. Molnár, József: Die Bearbeitung des Themenkreises „Ähnlichkeit" 14
Frau Piroska Gádor: Kurzbericht über den Dritten Internationalen Kongreß über Mathematikunterricht 1976 22
AUFGABEN 24

PÁLFY SÁNDOR
főiskolai tanár, OPI

A Kis Matematikus Baráti Körök (KMBK) 5. országos versenye I.

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulat (TIT) által életrehívott KMBK néhány év alatt országos mozgalommá terebélyesedett, és komoly szerepet töltött be az általános iskolai ideiglenes matematika tanterv bevezetésének előkészítésében.

Amikor hazánkban is időszerűvé vált a matematikatanítás korszerűsítése, kísérletek indultak el az általános iskolai tantervben eddig nem szereplő témák és módszerek kipróbálására, illetve keresésére, a KMBK foglalkozásain ezek kaptak polgárjogot. Így nemcsak visszajelzéseket, ötleteket kaptak az új tanterv formálói a Baráti Körök vezetőitől, hanem segítséget abban is, hogy a tanárok, az iskolák, a szülők ismerkedhettek, barátkozhattak az új elgondolásokkal.

Ez a barátkozás sikeres volt, mert mind gyakrabban találkozhattunk az általános iskolákban a matematikaórákon olyan feladatokkal, amelyeket a KMBK foglalkozásairól hoztak magukkal a gyerekek. Nem véletlenül ismétlődött meg gyakran az egyes foglalkozásokon, hogy a tanulók egy része 2-2 munkalapot igényelt, mondván, hogy a „Tanár úr kérte, vigyek neki is egyet".

Az ideiglenes matematika tantervre való áttérést azzal is segítette a TIT, hogy a KMBK vezetői részére minden évben 5-6 napos nyári előadói konferenciát szervezett vidéki városokban, átlag 200 matematikatanár részére. A konferenciákon a matematika olyan fejezeteivel foglalkoztak, amelyek a korszerűbb matematikatanítás jellemzői.

Év közben is szervezett előadásokat a TIT matematikatanárok részére, újabban a szülők tájékoztatására is.

A TIT Matematikai Választmánya 1971-ben elhatározta, hogy az 1971/72. tanév végén megrendezi a KMBK első országos versenyét. Első alkalommal csak 5—6. osztályos tanulók részére, mert a 7—8. osztályosok az úttörőmozgalom keretében vetélkedhettek.

A versenyt szívesen fogadták a KMBK vezetői és tagjai, ezért minden évben megismételték azt. A harmadik alkalommal már a 7. osztályosok is részt vehettek azon, mert az Úttörő Szövetség ettől kezdve csak a 8. osztályos tanulók részére tartotta fenn a matematika szaktárgyi vetélkedőjét.

Az elmúlt tanévben is sor került a KMBK országos versenyére. Ezt is — mint eddig valamennyit — három fordulóban bonyolították le.

Az első forduló a KMBK egyik foglalkozásán zajlott le. Az első selejtezést szolgáló feladatokat maguk a KMBK vezetői állították össze, ők bírálták el a tanulók munkáját. A második fordulót már a TIT Megyei Szervezete rendezte meg, a feladatokat azonban az Országos Versenybizottság* állította össze.

A feladatokat tartalmazó munkalapok zárt borítékban érkeztek a megyékhez, a feladatokat a rendezők a versenyzőkkel egyidőben ismerték meg.

A tanulók lebélyegzett lapokon dolgoztak, ezekre a megoldások mellett csak az általuk választott jeligét írták. A nevüket külön cédulára jegyezve egy kisebb borítékba zárták, és erre az a jelige került, ami a dolgozaton szerepelt.

Amikor elkészült valaki, a dolgozatát és a kis borítékot egy nagyobba helyezte, ráírta a jeligéjét, és lezárta ezt a borítékot is. Így továbbították a dolgozatokat az Országos Versenybizottsághoz, Budapestre.

A legutóbbi versenyről 353 ötödik, 272 hatodik és 219 hetedik osztályos dolgozat érkezett.

A dolgozatok első elbírálását utolsó éves, matematikaszakos egyetemi hallgatók végezték, elismerésre méltó érdeklődéssel, szeretettel és hozzáértéssel. Természetesen nem tudták, hogy ki az éppen bírált dolgozat szerzője, mert csak a jeligés lapokat kapták kézhez. Minden tanuló munkáját — egymástól függetlenül — két-két hallgató bírálta el, és a Versenybizottság által összeállított pontozás alapján értékelte.

Ezután vették a kezükbe a dolgozatokat az Országos Versenybizottság tagjai. A nagyon alacsony pontszámmal értékelt munkákat éppen csak átnézték, a többit azonban részletesen is megvizsgálták, szükség esetén javították is a pontszámokat, majd osztályonként rangsorolták a dolgozatokat, és megállapították, hogy milyen jeligéjű munkák szerzői jutnak be a döntőbe. Arra törekedett a Versenybizottság, hogy lehetőleg ott történjék a leválasztás, ahol hirtelen csökkennek a pontszámok.

A döntésről jegyzőkönyv készült, és utána került sor a jeligés borítékok felbontására.

Végül 35 ötödik, 34 hatodik és 33 hetedik osztályos tanulót értesített a Versenybizottság arról, hogy a teljesítménye alapján bekerült az országos döntőbe. Szintén a döntőbe került osztályonként még egy-egy tanuló, akiket a TIT Matematika Választmánya meghívott, mert az

* A Versenybizottság tagjai: Imrecze Zoltánné továbbképzési felügyelő, Karádi Károlyné szakfelügyelő, Miklós Györgyi tanárnő, Pallós Emil tudományos munkatárs, Pálfy Sándor főiskolai tanár, dr. Urbán János egyetemi adjunktus. A feladatok egy részét Hódi Endre tanszékvezető (OPI) készítette.

Iskolarádió TÖRD A FEJED matematikaadásában közölt feladatok megoldásában a tanév közben a legtöbb pontot szerezték.

Az országos döntőre június 17—19-én került sor Csillebércen, az Úttörőtáborban, nagyon jó körülmények között. Kétfordulós volt a döntő. Első nap minden tanuló 5 feladatot kapott. A megoldások elbírálása szintén titkosan történt, és a 10—11 legjobb versenyző került a döntő második fordulójába.

Az első nap szerzett pontokat mindenki magával vitte a második fordulóba, és ezekhez szerezhetett újabbakat négy-négy feladat megoldásával.

Azok részére, akik a második napon nem versenyeztek, játékos matematikai foglalkozást tartott Békeffy Zsuzsa veszprémi és dr. Eglesz Istvánné budapesti tanárnő.

Végül kialakult a helyezési sorrend, és ünnepélyes keretek között tudták meg a tanulók, hogy kik érték el a legjobb eredményt, kik érdemelték ki az elismerést és a jutalmat.

Az 5. osztályosok versenyében:

1. **Danyi Pál,** Pécs, Jókai úti iskola. Vezetője: **dr. Hetyei Gáborné.**
2. **Baranyai Klára,** Hatvan, 1. sz. általános iskola. Vezetője: **Silkó Miklósné.**
3. **Ajkai Adrien,** Bp. VIII., Horváth Mihály téri iskola. Vezetője: **Koller Lászlóné.**

A 6. osztályosok versenyében:

1. **Kende Ágnes,** Bp. VIII., Horváth Mihály téri iskola. Vezetője: **Barabás Lajosné.**
2. **Tardos Gábor,** Bp. II., Ady E. úti iskola. Vezetője: **Koller Lászlóné.**
3. **Böröczky Károly,** Bp. XVIII., Brassói úti iskola. Vezetője: **dr. Szlukovényi Józsefné.**

A 7. osztályosok versenyében:

1. **Záhonyi Zsolt,** Bp. IV., Váci utca 43. sz. iskola. Vezetője: **dr. Eglesz Istvánné.**
2. **Magyar Gábor,** Bp. IV., Váci u. 43. sz. iskola. Vezetője: **dr. Eglesz Istvánné.**
3. **Sákovics József,** Bp. XII., Arany János iskola. Vezetője: **Zöllner Helga.**

A kétnapos döntő feladatai:

Valamennyi feladatot és megoldásukat közöljük. Legtöbbnél csupán a helyes választ és csak néhány esetben írjuk le részletesen a feladat megoldását. Az eredmények mellett az arányszámok azt jelentik, hogy a versenyzők a teljes megoldásra adott pontok hány százalékát érdemelték ki (a részteljesítményeket is figyelembe vette a Versenybizottság).

5. osztály

I. 1. Helyezzük el a nagy négyzetbe rajzolt kis négyzetekbe az 1, 2, 3, 4 és 5 számok mindegyikét ötször úgy, hogy a számok összege mindegyik sor, mindegyik oszlop és mindegyik átló mentén véve ugyanannyi legyen!

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Megoldás (39%): Egyet a táblázatba írtunk.

2. A vasútállomás az iskolától 500 méterre, a kórháztól 1,5 km-re van. Mekkora távolságban lehet egymástól a kórház és az iskola? (Rajzolj!)

Megoldás (37%): 1000 méter $\leqq$ távolság $\leqq$ 2000 méter.

3. Zoltán a padláson megtalálta nagyapjának egy régi iskolai számtanfüzetét. Ebben egy szorzást látott, de a leírt műveletben több számjegyet elmosott az „idő”. Zoltán a hiányzó számjegyeket pótolta, és megállapította, hogy a nagyapja annak idején hibátlanul számolt.

Mi is leírjuk a szorzást, a hiányzó számjegyek helyét csillaggal jelöltük. Pótold a számjegyeket. Azt is írd le, hogyan okoskodott Zoltán.

$$\begin{array}{r} *1* \cdot 3*2 \\ \hline *3* \\ 3*2* \\ **** \\ \hline ****30 \end{array} \qquad \textit{Megoldás}\ (53\%):\quad \begin{array}{r} 415 \cdot 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

4. Köbcentiméteres kockákból összeállítottunk egy nagy kockát, amelynek a felszíne 216 cm². Ezután a nagy kocka minden csúcsából elvettünk egy kis kockát. Mekkora az így visszamaradt test felszíne?

Hány cm³-es kockából raktuk össze a nagyot?

Megoldás (56%): A test felszíne ugyanannyi maradt. A nagy kockát 216 db 1 cm³-es kis kockából raktuk össze.

5. A táblázatban megadott számokkal írjátok fel különböző sorozatok néhány tagját, amelyek valamilyen szabály szerint, növekvő sorrendben követik egymást (pl. 10-zel osztható számok; összetett számok; ugyanazzal a számmal oszthatók stb.)

Néhány ilyen sorozatrészhez értelmes szavakat is kapcsoltunk. Ezeket összeállíthatjátok, ha a sorozat tagjai mellé odaírjátok a számnak megfelelő betűt.

Ki talál több olyan szabályt, amelyiket követve értelmes szavak adódnak?

A szavak mellé írjátok le, hogy milyen szabály szerint követik egymást a számok!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	S	O	K	K	D	B	I	E	I	A	S	L	L	SZ	M	E	A	S	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
I	E	E	T	L	R	E	E	T	A	E	M	Z	A	D	A	T	L	S	T
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
E	L	L	I	A	I	K	K	O	K	A	U	E	S	A	S	Á	B	R	B
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Ü	L	A	A	E	N	L	R	K	R	H	Á	E	S	L	T	N	I	T	I
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
T	Ö	Ü	K	N	A	A	Ö	N	I	K	R	D	U	E	Ö	K	N	S	K

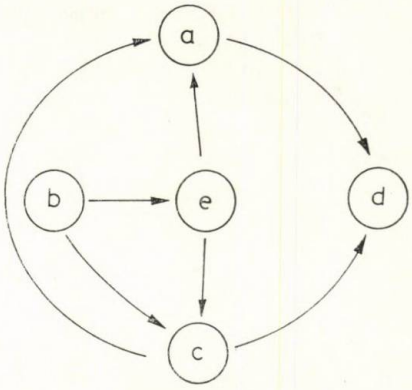
Megoldás (45%): Például:

a) 4, 8, ..., 100 (a számtani sorozat tagjaiból) KIS MATEMATIKUS BARÁTI KÖRÖK.

b) 2, 3, 5, ..., 97 (a prímszámokból): SOK BALESETET ELKERÜLHETÜNK.

c) 5, 10, 15, ..., 100 (az 5-tel oszthatókból): KISZALADTAK A BERLINIEK.

d) 2, 22, 42, 62, 82 (a számtani sorozat tagjaiból): SELLŐ. Stb.



II. 1. A nyíl mindig a nagyobbra mutat!

a) Pótold a hiányzó nyilakat!

b) Írd fel a betűket a növekedés sorrendjében!

c) Az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* betűk jelentsenek 0-nál nagyobb, különböző természetes számokat és $d=7$.

Milyen számok lehetnek a többi betűk? Írd fel a táblázatban!

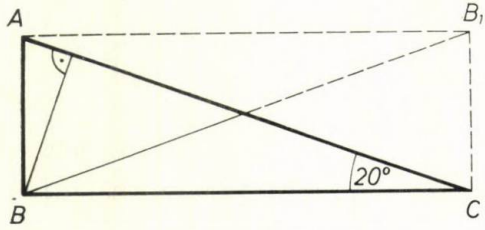
b	e	c	a
1	2	3	4
1	2	3	5
1	2	3	6
1	2	4	5
1	2	4	6

b	e	c	a
1	2	5	6
1	3	4	5
1	3	4	6
1	3	5	6
1	4	5	6

b	e	c	a
2	3	4	5
2	3	4	6
2	3	5	6
2	4	5	6
3	4	5	6

Megoldás (85%): (A táblázatot töltöttük csak ki.)

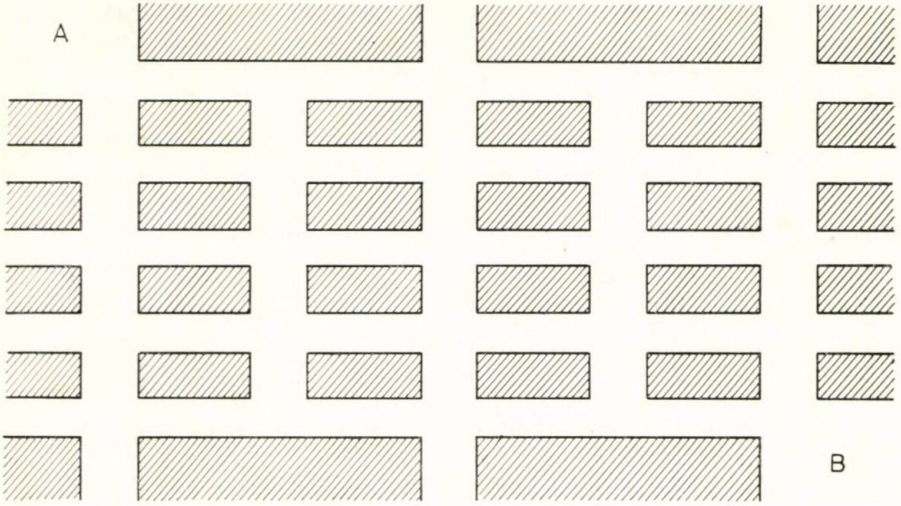
2. Szerkessz derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge 20°-os, és a hosszabbik befogója 8 cm! Ezután szerkeszd meg az átfogóhoz tartozó magasságot, és az átfogó felezőpontját kösd össze a derékszög csúcsával! Az utóbbi szakasz (súlyvonal) hány fokos szöget zár be az átfogóhoz tartozó magassággal?



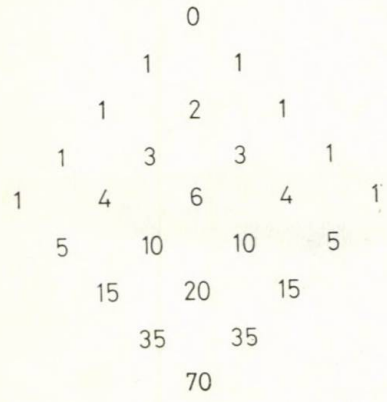
Megoldás (49%): Ha a szerkesztés elvégzése után a derékszögű háromszöget az átfogó felezőpontján át tükrözzük, téglalapot kapunk. A BB_1 átló az AB oldallal $90°-20°=70°$-os szöget zár be, a derékszögű háromszögbe rajzolt, az AC oldalhoz tartozó magasság pedig az AB oldallal $90°-70°=20°$-os szöget. A súlyvonal és a magasság egymással $70°-20°=50°$-os szöget zár be.

3. A rajz egy városrész térképe. Az *A* jelű tértől a *B* jelű térig hányféle különböző úton lehet elmenni?

(Csak jobbra, illetve lefelé szabad menni!)



Megoldás (77%):



4. Magdi levelet írt a legjobb barátnőjének, Évának, aki a levél végén ezt a keltezést olvasta:

„Zánka, 11 hó 1011-én."

Éva először csodálkozott, aztán rájött, hogy Magdi melyik hónap, melyik napján írta a levelet. Mondjátok meg ti is!

Megoldás (85%): Tekintve, hogy egy hónapban legfeljebb 31 nap van, csak a 2-es és a 3-as számrendszer jöhet számításba. Hármas számrendszerben április 31-ét jelenti a dátum. Ez nem felel meg, mert április 30 napos. Magdi a kettes számrendszerben írta fel a keltezést: március 11-én írta a levelet.

6. osztály

I. 1. Egy természetes számot 11-gyel osztva, maradékul 6-ot kapunk, 12-vel osztva pedig 3-at.

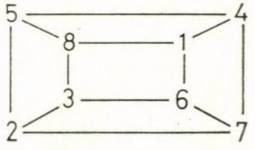
Mennyi lesz a maradék, ha 132-vel osztjuk ugyanazt a természetes számot?

Megoldás (33%): A maradék 39.

2. Az 5. osztályos **I. 1.** feladat volt. A hatodikosok teljesítménye 68%.

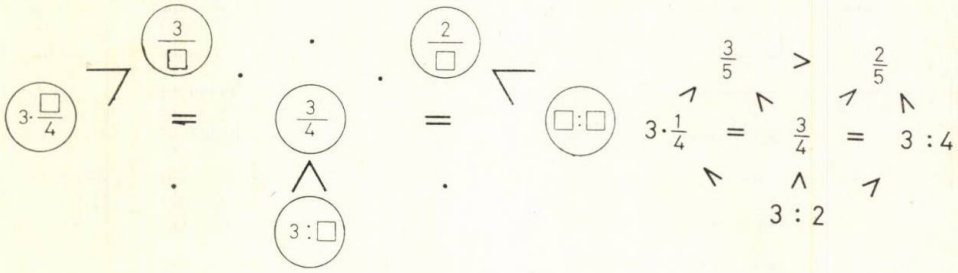
3. Írjuk az 1-től 8-ig terjedő természetes számokat egy kocka csúcsai mellé úgy, hogy ha bármelyik lap csúcsai mellé írt számokat összeadjuk, eredményül mindig ugyanannyit kapunk! (Rajzolj!)

Megoldás (78%): Például:



4. A körökbe rajzolt négyzetekbe írjatok egész számokat, amelyekkel a felírt egyenlőségek, egyenlőtlenségek igazak maradnak, majd a körök közötti pontok helyére rajzoljátok be a $<$ vagy $>$, vagy $=$ jelét aszerint, hogy mennyi a körbe írt kifejezés értéke!

Megoldás (78%): Például:



5. Egy téglalap átlója 20 cm. Az átló 30 fokos szöget zár be a téglalap oldalával. Mekkora a téglalapba rajzolható legnagyobb négyzet területe?

Megoldás (66%): Derékszögű háromszögben a 30 fokos szöggel szemközti befogó az átfogó felével egyenlő: a téglalap rövidebb oldala 10 cm. Ennyi a berajzolható legnagyobb négyzet oldala. A területe 100 cm^2.

A matematikatanítás MÓDSZERE

LÁSZLÓ ERZSÉBET
középiskolai tanár, Budapest

Vigyázat, zérus!

Bevezető

Egyik Arany Dániel-verseny feladata volt:
Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezést:

$$K = \left(\frac{a+2b}{a-2b} - \frac{a-2b}{a+2b}\right) : \left(\frac{a-2b}{a+2b} + 1\right).$$

Határozzuk meg K értékét, ha $a=3{,}5$, $b=-1{,}5$; továbbá ha $a=3$, $b=-1{,}5$.
Két kérdésre kellett tehát felelni. Egyik: K egyszerűbb alakja, erre a felelet

$$K = \frac{4b}{a-2b}.$$

A másik: a K-val jelölt kifejezés két helyettesítési értékének a meghatározása.

Ezt természetesen könnyebb megkapni, ha az eredeti összetett kifejezés helyett annak egyszerűbb alakjában végezzük el a helyettesítést. Ekkor:

1. ha $\begin{matrix} a=3{,}5 \\ b=-1{,}5 \end{matrix}$ akkor: $\frac{4b}{a-2b} = -\frac{6}{6{,}5} = -\frac{12}{13}$,

2. ha $\begin{matrix} a=3 \\ b=-1{,}5 \end{matrix}$ akkor $\frac{4b}{a-2b} = -\frac{6}{6} = -1.$

Mindjárt bele is esett a csapdába, aki mindkét értéket eredményként elkönyvelte. Mert -1 a $\frac{4b}{a-2b}$ kifejezésnek ugyan helyettesítési értéke, de nem az eredetinek. A 2. alatti a és b értékek mellett ugyanis az eredeti kifejezésnek nincs értelme! Vagyis a K-ra nyert egyszerűbb kifejezés nem minden a, b értékpárra azonos az átalakítás előttivel. Miért nem értelmezett K az $a=3$ és $b=-1{,}5$ esetén? Mert $a+2b$ nevezőként is szerepel, és ez az adott számpár esetén 0 értéket vesz fel.

Már az átalakítás előtt meg kell állapítani, hogy K nincs értelmezve, ha

illetve $\left.\begin{matrix} a-2b=0, \text{ azaz ha } a=2b, \\ a+2b=0, \text{ azaz ha } a=-2b \end{matrix}\right\}$ együtt: $\underline{a=\pm 2b}$ és ha $a=0$.

Ha ezt észrevesszük, akkor a második értékpárral már felesleges is foglalkoznunk.

Tanulság: még a kifejezés átalakítása előtt meg kell vizsgálni, mi az értelmezési tartomány, vagy az átalakítás után megnézni, hogy a két kifejezés értelmezési tartománya megegyezik-e.

Az átalakított kifejezésben $a-2b \neq 0$.
Az eredeti kifejezésben $a \pm 2b \neq 0$; $a \neq 0$.
Ezekre figyelni kell!

Sok példát lehetne felhozni arra, hogy eljárásaink alkalmazása csak megfelelő körültekintő vizsgálat után indokolt. Ezen vizsgálat során különlegesen figyelemre méltó szerepe lehet a 0-nak.

A zérust (zérót) vagy más nevén nullát mindenki ismeri, használja is gyakran. Már kisgyermek korában megismerkedik vele. Első osztályos tanulóként párhuzamosan a hangok jelölésének megismerésével — barátkozik a számírással is. Számtankönyvének már első lapjain megjelenik ilyesmi: $4-4=0$. Olvassa is: négyből elveszünk négyet, nem marad semmi (vagy „marad semmi", mint amiképp $8-5=3$, azaz 8-ból elveszünk 5-öt, marad 3). S ez a „semmi" mégis valami fogalommá válik, jele van, nevet kap. A kivonás maradéka, eredménye 0. — Sokszor leírja még a 0-t, az évek során tovább mélyül fogalma, ismertebbé válik szerepe, később — úgy tetszik — természetes ismerős, nincs vele probléma. S mégis: sokszor téves elképzelés, hibás kezelés mutatkozik meg felsőbb osztályos tanulóinknál is.

Következő — a zérussal kapcsolatos — rövid elmélkedésemet nem újdonságok feltárása céljából adom közre, hanem csupán fokozottabb figyelemkeltésül a 0 speciális szerepére, viselkedésére.

Mennyiségi kifejezés, számfeljegyzés

Az emberiség kultúrtörténetének kutatói igyekeznek feltárni a számfogalom kialakulását, a legrégibb számfeljegyzések módját. A természeti változások, a társadalmi érintkezési formák, az emberi tevékenység előbb-utóbb a mennyiségi kifejezés kényszere elé állította az emberi elmét, de sok időnek kellett eltelnie, amíg a mennyiséget szóval, jellel

ki tudták fejezni. A számok általunk használt szimbólumai ma már régiek, de hosszú fejlődés eredményei. Gondoljunk pl. arra, hogy a rómaiak C jele mennyire más, mint az ugyanannyit jelentő 100; vagy M, amely a mai írás szerint 1000. Ezek szókezdő betűk (centum, mille), míg pl. I lényegében a primitív egyetlen vonás, a II két vonás; X egy keresztülhúzott vonás, amely ügyesen, egyszerű jellel is már többet tud kifejezni (tízet). A számfeljegyzés egyes népeknél kialakult módját a fennmaradt emlékek alapján bemutatják a matematika történetének írói. A sokféle, és talán még nem egészen feltárt számírás mellett ma az indiai eredetű, s arab közvetítéssel átvett számírás használatos. A teljes mai számírás mód a 0-sal együtt csak a XII. században jelent meg Európában — valószínűleg Marokkón át először Spanyolországban —, s a XVI. században kezdett elterjedni. Történeti vonatkozásokkal azonban itt bővebben nem foglalkozunk. Elég nekünk tárgyunk szempontjából annyi, hogy a tízes számrendszer valószínűleg Indiában alakult ki, következetes írásmódja a hindu matematikusok érdeme.

A tízes számrendszerben a 0-t „üres" helyi érték jelölésére használjuk. A nálunk ritkábban használatos zéró szónak az arab zifr felel meg: üresség, semmi. Érdekességként megemlítjük, hogy a XV. század végén néhány okiratban szereplő „cifra" szavunk zérót jelent, később lett a semmi a latin nulla, amelynek jelentése ugyancsak semmi, senki, egy sem. A szavaknak szokás megadni a nyelvi jelentését, de a fogalmat is, amelyet jelölnek. Üssük fel pl. az Új Magyar Lexikont a nulla szónál. Ezt olvassuk:

nulla (semmi), zérus (arab „üres" latinosított alakja), jele 0:

1. mint *számjegy* azt mutatja, hogy egy számban bizonyos helyértékű egységek hiányoznak,

2. a számegyenes (számsík) kezdőpontját jelölő *szám*. Ha egy számhoz hozzáadjuk, annak értéke nem változik. Egy tetszőleges számot nullával szorozva nullát kapunk. A nullával való osztásnak nincs értelme.

Üssük fel a zérus (zéró) szónál: a nullát jelölő számjegy, a nulla szinonimája.

Szerepel tehát számként is, mint a többi (1—9-ig) használt számjegy, amelyek önállóan is jelölnek valamennyit egy halmazból. Többjegyű szám esetén ezen értékük tíz-, száz-, ezerszeresét stb. jelölik, aszerint, hogy a második, harmadik stb. helyen állnak-e (5 hordó olaj, 50, 500 hordó). Egy-egy hellyel való előreugrasztása a számjegynek eredeti (illetve helye szerinti) értékének mindig tízszeresére növekedését jelenti. Éppen ebben áll a tízes számrendszerbeli szám *írásrendszerének* egyszerűsége és nagyszerűsége (és származik sok más előnye). A rómaiak is tízes számrendszerrel dolgoztak, de számírásuk szerkezete nem rendelkezett kihasználható előnyökkel, sőt inkább fejlődését akadályozó hátrányokkal. A 0 mint számjegy, akárhol áll, mindig semmit jelent, valamiből nincs semmi, pl. a harmadik helyen azt jelenti, hogy a százasok helye üres, százas nincs. A többi jegy értékének felismerése szempontjából az üres hely megjelölése, 0-sal való kitöltése igen jelentős feltalálás.

(Megjegyezzük, hogy a tízes számrendszer csak egy a sok-sok lehetséges számrendszer közül. Egy más, pl. hatos rendszerben elég 6 jel. Ha ebben 1-től 5-ig az ismert jeleket használnánk, akkor már a hatot kétjegyű szám írná le így: 10, itt azonban az 1 eredeti értékének a hatszorosát kell érteni, és pl. 100 leírásával a hatos rendszerben még csupán a tízes rendszerbeli 36-ot írtuk le. A szerkezeti felépítés minden számrendszerben ugyanazon elven nyugszik.)

A helyérték-rendszeren alapuló kifejezésmód teszi igen egyszerűvé a tizedes törtek (ismert) leírását is.

Természetes számok

Nyilvánvalónak látszik, hogy a mennyiségi kifejezés kényszere folytán, bizonyára számlálás útján állottak elő a ter-

mészetes számok, mint mennyiségi megnevezések, elvonatkoztatás útján. A számlálás így történik: 1, 2, 3, ..., 9, (most kerül elő a 0!) 10, 11, 12, ..., ..., 20, 21, 22, ... Tíz jelünk, számjegyünk van, ezekkel — a helyérték-rendszernek köszönhetően — bármely számot könnyen le tudunk írni. A természetes számsorban az első helyen álló számjegy értékét eggyel növelve nyerjük a következő elemet, a második helyen álló jegy értéke csak akkor változik meg 1 hozzáadásával, ha az első helyen 9-es állt. (Pl. 19 076+1 = 19 077, és 19 079+1 = =19 080.) A 9-es helyére ekkor 0 kerül! 81 999+1 esetén 82 000-et kell írnunk rendszerünkben, hiszen a 9-es előtt álló jel helyett a rákövetkező jelet kell vennünk. De a 9-es előtt éppen 9-es áll, ennek növelése megváltoztatja az előtte álló, megint csak 9-es jelét, ennek növelése megmozdítja az előtte álló számjegyet: 1-es helyett 2-est írunk. Az ismert, számírásunkban felhasznált jeleinket is tehát sorrendbe kellett állítanunk, ez a számlálással: 1, 2, 3, ..., 9 meg is történt, bármelyik számjegyünk (az ismert rendben megadott számsorban) az előtte állónál mennyiségileg egy egységgel többet tartalmaz, eggyel nagyobb. Később merült fel ugyan annak szükségessége, hogy a zérust se hagyjuk ki, de — az elmondottak alapján — szinte kívánkozik, hogy a 0-t az 1 elé tegyük. Szokás is a természetes számsort így kezdeni: 0, 1, 2, 3, ... így a 0-t is *felvesszük* a természetes számok sorába. Bár abban a kérdésben, hogy természetes szám-e a zérus, nincs egység az irodalomban. Ha természetes számnak vesszük a zérust, a számsorban csak elől állhat; különben is kezdetnek, kiindulásnak jó. Még nincs semmi, ez a semmi is „létezés", mondhatnánk, az van, hogy nincs semmi! 1 hozzáadásával már lesz 1! Így hát megegyezhetünk abban, hogy a 0 természetes szám.

A szám később egyre bővebb tartalmú jelentéssel bíró fogalommá válik, a természetes számsor mindenesetre a kezdet. Kronecker szerint: a természetes számokat Isten teremtette, minden egyéb emberi alkotás. Ezzel mintegy arra utal, hogy természetes kényszerből fakadóan szóbeli vagy egyéb jelzésre kellett minél előbb rábukkanniuk az embereknek, hogy bizonyos dolgok csoportjait egymáshoz képest egyenlő, vagy különböző mennyiségűeknek tekintsék-e, illetve különböző dolgok közös tulajdonságát, nevezetesen azok mennyiségét tárgyuktól függetlenül kiemeljék.

Nem misztika — sajátosság

A régi görögök számok leírására (i. e. V. századtól) az ábécé betűit használták, a betűtől való megkülönböztetés céljából jobbra fent egy vesszőt írtak (pl. $5=\varepsilon'$), s a mi zérussal végződő számainknak külön jele volt (pl. $30=\lambda'$). Még előbb (i.e. VI. sz.) Pitagorasz titokzatos iskolája számmisztikát alakított ki. Az *egyet* minden szám ősének tekintették; a *tíz* a világ tökéletessége. Voltak úgynevezett barátságos számok, tökéletes számok. A számokat tiszteletben részesítették. Misztikus tartalom egyes számokat a későbbi időkben is megtöltött. Talán elég utalnunk a 7-es, a 13-as számra, a szokásos mesebeli három kívánságra, a dantei kilencesre. Sok érdekességet lehetne összegyűjteni a számokkal, az azokra ruházott mágikus, misztikus vonásokkal kapcsolatban. A zérus ilyesmikkel nem rendelkezik (bűvös körökkel sem hozható kapcsolatba), de viselkedése mégis kiemeli a többi szám közül, érdemes ezt szemügyre venni. Sőt: a zérust szemmel kell tartani, törődni kell vele!

Zérus, zérus — itt és ott

Gyakran láthatunk olyan számokat, amelyek egy vagy több 0-sal kezdődnek. Például villamosbérleten olvasható: 052419, vagy egy ötszáz forintoson: 003239. Ezek a számkezdő zérusok utalhatnak arra, hogy valamely vonatkozásban hány jegyű számjelölést alkalmaznak, a kiadott számozott példány sor-

számában azonban valamely magasabb helyi értékek nem szerepelnek. — Fontos közérdekű telefonszámok is kezdődnek 0-sal: pl. 02, 05.

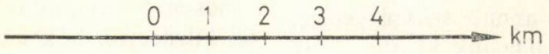
Sorozatgyártásnál nullsorozatról is beszélünk. A gyártmány első példánya vagy példányai elkészülnek, csak ezután kezdik a szokásos módon számlálni a gyártmánysorozatokat.

Az országutakon, kilométerköveken távolságokat jelölnek meg. 1 kilométert csak 1 km-es út megtétele után jelezhetünk, de valahonnan számítva. Budapesten látható a magyarországi úthálózat kiindulását jelölő 0 km-kő. Tájékozódáshoz valamely változatlan hely, pont jelölésére szolgál a 0, illetve megfigyeléseinkhez *valamely helyzethez való viszonyítás* alapjául. A nullapont építkezéseknél a választott alappont a magasságok felmérésére; bizonyos vízállási magasságot a vízállás magasságának mérésére szolgáló mércéken nullponttal jelölnek meg. 0-val jelölik a hőmérőn azt a pontot, ameddig a higany (borszesz) szála emelkedik, ha olyan hőmérsékleten van, amelyen a víz megfagy. A fagyáspont a nullapont, a változatlan kiindulási pont, ahonnan kezdhetjük a mérési eredmény kifejezését.

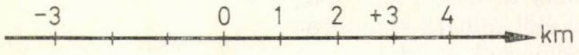
Valamely fix helyben, pontban meg kell állapodnunk, ha mérni, mennyiséget számmal kifejezni akarunk (mérleg mutatójának alapállása, kiindulásul választott délkör, szélességi kör stb. a 0 jelet kapja). A 0 tehát jó szolgálatot tesz valamely rend megállapítása alapjaként, kiindulásként.

Számhalmazok „0 km-köve"

Térjünk vissza a számok világához. Már a lexikonban olvastuk a zérusról: a számegyenes (számsík) kezdőpontját jelölő szám. — Csak a természetes számokra gondoljunk most. Képzeletbeli egyenes úton haladjunk egyenletes sebességgel, pl. percenként 1 km utat téve meg. Valahonnan elindulunk ezen az úton, s meg akarjuk jelölni, bizonyos idő (1, 2, 3, ... perc) elteltével hol vagyunk. A kiindulás helyét 0-sal jelöljük. Ha az irányt is megadjuk, akkor az úton kijelölhetjük azokat a helyeket, ahol a mozgás során 1, 2, 3, ... perc múlva lennünk kell. Ábrán ezt így tüntetjük fel:



Persze, a kezdőponttól kiindulva ellenkező irányba is mehettünk volna, s ekkor pl. 3 perc múlva ugyanakkora távolságra volnánk a 0-sal jelölt helytől, mint amikor az előbbi irányban haladtunk. Ha a két lehetséges irányt meg akarjuk különböztetni, ezt valahogyan jelölnünk kell. Azt a helyet, ahová az előbbi iránnyal ellentétes irányban 3 km-es út megtétele után jutottunk —3-mal jelöljük:



Ábránk egyenesén a 0 elválasztja az ugyanannyi egységet tartalmazó 3 és —3 (hogy biztosabb legyen: +3 és —3) számokat. Egyik irányban (hasonló módon) a pozitív, a másik irányban a negatív (egész) számokat helyezhetjük el az egyenesen, amelyet *számegyenesnek* nevezhetünk. Maga a 0 egész számnak tekinthető, de se nem pozitív, se nem negatív, hiszen éppen *hozzá viszonyítva* nevezhetünk egy számot pozitívnak vagy negatívnak. Könnyű belátni, hogy a számegyenesen kijelölhetjük azokat a pontokat is, amelyek törtszámokkal kifejezhető nagy-

ságú távolságokra vannak a 0 helyétől akár pozitív, akár negatív irányban (1/2, 5/4, 12/5 stb. távolságokat ki tudunk jelölni). Minden pozitív, negatív egész és pozitív, negatív (két egész hányadosaként felírt) törtnek megfeleltethetjük a számegyenes egy pontját, és csakis egy pontját. Ezek a számok, — a 0-sal együtt — adják a racionális számok halmazát. A racionális számok nagyság szerint *rendezettek*. Ez azt jelenti, hogy két tetszőleges a és b racionális számot tekintve csak három lehetőség állhat fenn: $a=b$; $a>b$; $b>a$, és csak valamelyik teljesül. — Ha $a>0$, pozitív, ha $a<0$, negatív számról van szó. Így a 0 *nem eleme* sem a pozitív, sem a negatív számok halmazának. A számegyenes egy számmal megjelölt pontjához a szám nagyságának megfelelő hosszúságú, a 0 helyről kiinduló nyíl mutathat, azaz az illető ponthoz egy vektort rendelhetünk. A 0-sal jelölt ponthoz olyan vektort rendelhetünk, amelynek kezdő- és végpontja egybeesik. Az ilyen vektort nullvektornak szokás nevezni (sem nagysága, sem iránya nincs, illetve tetszőleges irányú). Annak a — 0-pontból kiinduló — vektornak a hosszúsága, amelyet az egyenes valamely számmal jelölt pontjához húzhatunk, az illető szám abszolút értéke. A 0 pontra szimmetrikusan elhelyezkedő számok (pl. 3 és -3) abszolút értéke így nyilvánvalóan megegyezik. A 0 abszolút értéke 0; a vele jelölt pont 0-ra vonatkozó tükörképe önmaga.

A racionális számoknak megfelelő pontokon kívül a számegyenesnek más pontjai is vannak, ezekhez is tartozik valamilyen — nem racionális — szám. Ugyanis a 0-tól kiindulva vannak olyan távolságok, amelyeknek mértéke — adott egység mellett — nem racionális szám. (Gondoljunk csak pl. az egységnyi oldalú négyzet átlójának hosszúságára!). Ezen távolságok végpontjához nem racionális, hanem irracionális szám kerül. A számegyenes minden pontja jelent egy számot, ezeknek a számoknak a halmaza a valós számok halmaza.

A zérus szerepe a műveleteknél

Az ősi mennyiségi absztrakciótól, a természetes számoktól már messze jutottunk. A szám fogalma alaposan kibővült. Kényszerített a kibővítésre a két (vagy több) számmal valamely megállapodás alapján előírt műveletvégzés. Ismeretes a négy *alapművelet* (összeadás, kivonás, szorzás, osztás). Két természetes szám összeadása, szorzása nem vezetett ki a természetes számok köréből, azaz összegük, illetve szorzatuk is természetes szám. Kivonásnál két egyenlő szám különbségét már az első osztályos tanuló 0-sal jelöli. Ő még nem von ki kisebből nagyobbat, de egyszer erre is sor kerül, s megismerkedik a negatív számokkal. Részekre osztásnál, számok osztásánál megismerkedik a törtszámokkal.

Mi a szerepe a 0-nak ezeknél a műveleteknél?

Legyen $a\neq 0$ tetszőleges racionális szám, ekkor

$$a+0=0+a=a,$$

$$a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

Ezekre utalt a lexikonban olvasható értelmezés 2. pontja is. Mindkét műveletnél érvényesül a felcserélhetőség (kommutáció) törvénye: az összeadandók, illetve a tényezők felcserélése nem befolyásolja az összeget, illetve a szorzatot. A kivonásnak ez nem törvénye.

$$a-0=a; \quad \text{de} \quad 0-a=-a.$$

Az összeadás megfordíthatóságának törvénye szerint az $a-0$ olyan számot (c-t) jelent, amelyhez 0-t adva a-t kapunk: $c+0=a$, azaz (előbbiek szerint)

$$c=a,$$

tehát:

$$a-0=a.$$

Éppen így $0-a=c$, ha $c+a=0$. Szokás $0-a$-t röviden $-a$-val jelölni (ez az a elem negatívja); ekkor: $c=-a$, és így $-a+a=0$, ebből következik, hogy $-(-a)=a$, vagyis $-a$ negatívja a. Következik az is, hogy két szám összege akkor 0, ha abszolút értékük

ugyanaz, de előjelük ellentétes, vagyis egymás negatívjai.

$a:0$ (a szorzás megfordíthatóságának törvénye alapján) olyan szám, amelyet 0-val szorozva a-t kapunk. Előbb láttuk, hogy ha az egyik tényező 0, a szorzat zérus, nem kapunk 0-tól különböző számot. $a:0$ tehát *értelmetlen*. Van viszont értelme a $0:a$ hányadosnak, van ugyanis olyan szám, amelyet a-val szorozva 0-t kapunk, ez pedig a 0. Tehát:

$$0:a = 0.$$

Legyen most az alapműveletekben szereplő mindkét szám 0. Ekkor:

$$0+0 = 0$$

$$0-0 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0;$$

csak a $0:0$ válik problematikussá. Olyan számot keresünk, amelyet 0-val (az osztóval) szorozva 0-t (az osztandót) kapunk. De bármely szám ilyen, vagyis az osztást egyértelműen nem végezhetjük el. A $0:0$ hányados határozatlan, ugyanis számhalmazunk bármely elemét jelenthetné a hányados értelmezése alapján.

A műveletektől azt kívánjuk, hogy mindig és *egyértelműen* elvégezhetők legyenek. Ezt a racionális számkörben csak úgy biztosíthatjuk, ha a 0-sal való osztást kizárjuk (akár 0, akár 0-tól különböző szám az osztandó).

A 0 a racionális számok halmazában kitüntetett szám, bármely számhoz adva a szám változatlan marad; bármely számmal szorozva a szorzat mindig zérus; a zérussal való osztást pedig kizárjuk!

Még néhány műveletről kellene szólnunk: A pozitív egész kitevőjű hatványozás és az ugyanilyen 1-nél nagyobb gyökkitevőjű gyökvonás; ezek különösebben említendőt nem hoznak, 0 pozitív egész kitevőjű hatványa és gyöke is 0.

A hatványozás általánosításánál, amikor is áttérve tetszőleges racionális számkitevőre értelmezzük a hatványozást, célszerűen kikötjük, hogy az alap pozitív szám ($a>0$). Az új definíciók: $a^0=1$ és $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

A $0^0=1$ értelmezés ellentmondásra vezet, mert pl. ha azt akarjuk, hogy a hatványozás azonosságai érvényben maradjanak, akkor az $1=1^0=\left(\frac{1}{1}\right)^0=\left(\frac{1}{0}\right)^0$ egyenlőség következne, ami lehetetlen. (Értelmetlen feladat pl. $0^0 \cdot 3^2$ is!). És mivel az $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ definíciót is célszerűen elfogadtuk, itt is alapnak nem engedhetjük meg a zérust (már a 0-sal való osztás tilalma miatt sem). Természetesen mindezeknek további kihatásai is lehetnek. 0-ik gyökről nem beszélhetünk. Definíció szerint ugyanis $a^{\frac{1}{n}}$ és $\sqrt[n]{a}$ megegyeznek, $\frac{1}{n}$-nek azonban $n=0$-ra nincs értelme. Értelmetlennek minősítjük a 0 alapú logaritmust is. Például $\log_0 3$ értelmetlen, hiszen 0-nak minden — szóba jöhető — hatványa 0, sohase lehet 3. A $\log_0 0$ pedig tetszőleges értéket jelenthetne, lehetne pl. 5, vagy 14 is, hiszen 0 ilyen hatványai 0-sal egyenlők. A 0-nak (a szóba jöhető alapok mellett) nincs logaritmusa, nem beszélhetünk $\log_5 0$-ról, nincs olyan szám, amelyre 5-öt emelve 0-t kapnánk.

Egy pillantás a kombinatorikára

Érdekes fejezet a matematikában a kombinatorika. Véges halmazokkal foglalkozik — függetlenül attól, hogy mik e halmazok elemei (betűk, tárgyak, emberek, jelenségek) —, amelyeknek elemeit valamilyen szempontból elrendezni vagy csoportosítani óhajtjuk. Ha az elemek egy „alapelrendezését" ismerjük, akkor azokat természetes számokkal sorrendben megjelölhetjük (azaz úgy, hogy az elsőhöz 1-et, a másodikhoz 2-t rendelünk, és így tovább), és már csak az 1, 2, 3, 4, ..., n elem újabb más elrendezésével, csoportosításával kell törődnünk, ami az eljárást egyszerűbbé, az elemekkel bánást könnyűvé teszi. Megjegyzem,

hogy az alapsorrend számozását nem kezdjük 0-sal; gyakorlatilag nem „természetes" a számlálást — mert ez az! — 0-sal kezdeni.

Legegyszerűbb kérdése a kombinatorikának az, hogy egy n elemű halmaz elemeit hányféle sorrendben lehet (egy sorban) elrendezni. Például öt különböző színdarabot akarunk megnézni, mindegyiket egy-egy alkalommal. Hányféle sorrendben valósíthatjuk meg ezt? Mindegyik előadást (a darab címe helyett) egy számmal jelölünk meg, célszerűen 1, 2, 3, 4, 5-tel. Így mindjárt egy (bár tetszőleges) alapsorrendet is megállapítottunk, és most már csak az 1-től 5-ig terjedő számokat kell az összes lehetséges, egymástól különböző sorrendben felírni. Megállapítható, hogy a lehetséges sorrendek száma $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, vagyis az 5 előadás megtekintésére 120-féle sorrendi lehetőségünk van. Röviden így írjuk: $5! = 120$ (öt faktoriális $= 120$). n elemű halmaz esetén $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Ezek szerint: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, stb. $0!$ kérdését talán senki fel sem vetné (mint ahogy $\frac{3}{4}!$, vagy $-6!$-ra sem gondolunk). Mégis, a kombinatorikához kapcsolódó egyéb kérdések szükségessé tették, hogy a $0!$-t is bevezessük. Megállapodtak abban, hogy $0! = 1$ legyen.

A szimbólum $(n!)$ bevezetésével az elemek elrendezése — mint jelenség — háttérbe szorul, mintegy eltűnik. $n!$ egy számot jelöl ($5! = 120$), műveletek kijelölésében valamely számot „takar". A $0! = 1$ definíciónak célszerűsége a kombinatorika más problémáinál válik igazán érthetővé. Például az ismétléses permutációk számát (n elem lehetséges permutációinak száma, ha köztük k megegyező van):

$$P_{n;k} = \frac{n!}{k!}$$

képlet alapján határozhatjuk meg. Ha minden elem különböző, nincsenek megegyező elemek, akkor $k = 0$ és $P_{n;0} = P_n = n!$, hiszen ilyenkor egyszerű, ismétlés nélküli permutációról van szó. Ekkor:

$$\frac{n!}{k!} = n!$$

kell legyen, ez akkor lehet, ha $k! = 1$. Jó tehát, ha elfogadjuk, hogy $0! = 1$.

Ennek bevezetésével $\binom{n}{0}$, sőt $\binom{0}{0}$ is értelmezhető.

$\binom{n}{0} = C_{n;0}$ jelenti, hogy n elem közül minden lehető módon válasszunk ki 0 elemet;

$\binom{0}{0} = C_{0;0}$ 0 elem közül minden lehető módon 0 elemet, — fel sem tennénk gyakorlatilag ezeket a kérdéseket. A kombinációs csoportok számának megállapítására szolgáló

$$C_{n;k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

képlet alapján a $0! = 1$-ben való megállapodásunk következtében lesz értelme ezeknek is, éspedig:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{és} \quad \binom{0}{0} = 1.$$

Egyetlen célszerű megállapodásunk az összefüggések kezelésében, alkalmazásában nagy könnyítést jelent. A zérusnak most is figyelemre méltó szerep jutott.

Zárszóként

Ezek után az elmondottakat lehetne vizsgálni az iskolai anyag különböző alkalmazási területein. A zérus különleges viselkedésére figyelni kell, pl. ha szögfüggvényekkel van dolgunk, hiszen azok éppen úgy rejtegetik számértékeiket, mint pl. az algebrai kifejezések betűi. Vagy például a függvények vizsgálatánál is kell a 0-ra gondolni, akár mint függvényértékre, akár mint a változóéra. Mindezen szerepek bemutatása, a körültekintés hiánya és a figyelmetlenség veszélyeinek illusztrálása már egy másik értekezés tárgya lehetne.

DR. MOLNÁR JÓZSEF
vezető szakfelügyelő, Fővárosi Pedagógiai Intézet

A „hasonlóság" témakörének feldolgozása (A síkidomok hasonlóságának tanítási kérdései)

I. 1. A helyes fogalomalkotás céljából szükséges kiemelni, hogy a *geometriai hasonlóságról* és nem köznapi értelemben vett hasonlóságról van szó. A „hasonló" szónak ugyanis tágabb jelentést tulajdonítanak, pl. azt mondják, hogy a fénykép hasonlít ahhoz, akiről készítették, jóllehet a személy, akiről készítették, mértani értelemben test, a fénykép pedig síkidom, s ezért a képen levő bármely távolságnak és a tárgyon levő megfelelő távolságnak az aránya nem minden esetben ugyanaz.

2. Ha a geometriai értelemben vett hasonlóságról beszélünk, akkor is két értelmet szoktunk tulajdonítani a szónak:

a) A „hasonlóság" szóval jelöljük azt a *kölcsönösen egyértelmű leképezést* (transzformációt), amely úgy felelteti meg az egyik ponthalmaz elemeinek a másik ponthalmaz elemeit, hogy bármely két képpont távolságának és a megfelelő tárgypontok távolságának aránya minden esetben ugyanaz a 0-tól különböző szám: képletben, ha $P_1 \to \varphi(P_1)$; $P_2 \to \varphi(P_2)$, akkor $\frac{\overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}}{\overline{P_1P_2}} = \lambda$ állandó a hasonlóság aránya: $\lambda \neq 0$.

b) Kissé más értelemben használjuk a „hasonlóság" szót, amikor *geometriai alakzatok hasonlóságáról* beszélünk. Két geometriai alakzatot ugyanis akkor mondunk hasonlónak, ha van olyan egy-egyértelmű leképezés, amely az egyik alakzatnak a másik alakzatot úgy felelteti meg, hogy a képalakzaton bármely két pont távolságának és a tárgyalakzat megfelelő két pontja távolságának aránya mindig ugyanaz a szám legyen. Ekkor tehát a „hasonlóság" egy *relációt* jelent a két alakzat között, amely nyilván reflexív, szimmetrikus és tranzitív, és ezért *ekvivalenciareláció*. Alkalmas arra, hogy a geometriai alakzatokat közös elem nélküli osztályokba soroljuk. Az egy-egy osztályba sorolt elemekről mondhatjuk, hogy „alakjuk" megegyezik. Az „alak" szó használata így válik egzakttá, egyértelművé.

3. Nem fölösleges bevezetőben megemlíteni, hogy a témakör tanítása mind *a gyakorlati életre nevelés*, mind a tanulók dialektikus-logikus gondolkodásának fejlesztése szempontjából hasznos. Elég utalnunk arra, hogy épületek, munkadarabok,... tervrajzok alapján készülnek, amelyeknek készítésénél a geometriai hasonlóságot alkalmazzák. A matematikán belül pedig a hasonlósági leképezés *függvénykapcsolat* a tárgyalakzat és a képalakzat elemei között, s így a mozgás, a változás, a kölcsönös összefüggés figyelembevételére neveli a tanulókat. Segíti az egységes matematikai szemléletmód kialakítását.

4. A módszertani problémák, amelyek a tárgykör tanításával kapcsolatban jelentkeznek, ugyanazokkal a kérdésekkel fogalmazhatók meg, amelyek más témakörök tanításával kapcsolatban is feltehetők:

a) Mit tanítsunk?

b) A kiválasztott anyagot milyen mélységig tárgyaljuk?

c) Mi lehet a témakör tanítási egységekre való célszerű felbontása, ezek sorozatba rendezése? Mit és hogyan gyakoroltassunk, ismételjünk, rendszerezzünk? Mit és hogyan ellenőrizzünk, értékeljünk, osztályozzunk? Hogyan szervezzük a tanítási órákat? Hogyan szemléltessünk, hogyan tevékenykedtessük a tanulókat? Röviden: Milyen legyen a témakör didaktikai feldolgozása?

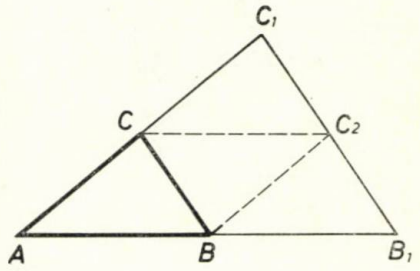
II. Próbáljunk válaszolni az **I. 4.** pontban feltett kérdésekre. A kérdések ugyan szervesen összefüggnek, de nem térhetünk ki mindegyiknek részletes megválaszolására. Ezért nem is alkalmazkodunk a sorrendhez.

1. Az általános iskolai tanterv kb. 6 órában jelöli meg a témakör feldolgozására szánt időt. A tanügyi fegyelem megsértése nélkül fordíthatunk rá 8 órát, 2 hetet, ha figyelembe vesszük az évközi ismétlésekre és ellenőrző dolgozatok íratására biztosított órakereteket. Úgy tűnik, célszerű előre venni — a tankönyv bevezető példája is ezzel indítja a témakört — a „Nagyítás és kicsinyítés" témát. Ennek keretében megismertethetjük a tanulókkal a *középpontos hasonlóság* tulajdonságait. Kiemeljük, hogy hogyan mozognak ennél az átalakításnál az alakzat pontjai, szakaszai, szögei, egyenesei stb. Egyszerű feladatok megoldása során a legtöbb tanuló e kérdésekre önállóan is megtalálhatja a választ.

Például: Szerkesszünk (előre megadott adatokkal) egy ABC háromszöget, utána pedig olyan $A_1B_1C_1$ háromszöget, amelynek megfelelő oldalai kétszer akkorák.

A szerkesztéshez a következő vázlatot adjuk:

Amit rajzoltunk, írásban rögzítsük: $AB_1 = 2 \cdot AB$; $AC_1 = 2 \cdot AC$ feltételek. Kérdés: $B_1C_1 = 2 \cdot BC$ igaz-e? Ha BC párhuzamos volna B_1C_1-gyel, akkor ez könnyen belátható volna, mert ekkor, ha $CC_2 \parallel BB_1$, akkor $ABC\triangle \cong CC_2C_1\triangle$, és ezért $B_1C_1 = 2 \cdot BC$.



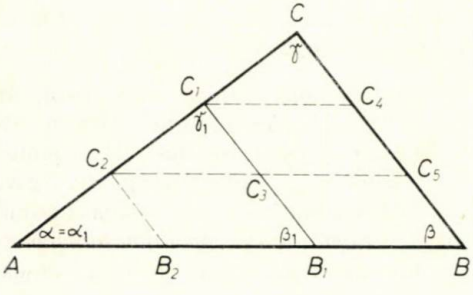
Ha az osztály tanulói többségükben a geometria tanulásában még csak az ún. szemléletes foknál tartanak, akkor kivágatjuk velük az ABC háromszögnek megfelelő modellt, és ráhelyeztetjük a CC_2C_1 háromszögre. Ekkor szemlélet alapján győződnek meg arról, hogy $CC_2 \parallel BB_1$; $BC \parallel B_1C_1$ és $B_1C_1 = 2 \cdot BC$.

Következő feladat lehet: Szerkesszünk egy ABC háromszöget, utána olyan $A_1B_1C_1$ háromszöget, amelynek oldalai $\frac{2}{3}$ részei az ABC háromszög oldalainak!

A szerkesztést a következő módon irányítjuk:

$AB_1 = \frac{2}{3} \cdot AB$; $AC_1 = \frac{2}{3} \cdot AC$ feltétel.

Kérdés: $B_1C_1 = \frac{2}{3} \cdot BC$ igaz-e? Ha $B_1C_1 \parallel BC \parallel B_2C_2$, akkor $B_2B_1 \parallel C_2C_3 \parallel C_1C_4$ miatt $AB_2C_2\triangle \cong C_2C_3C_1\triangle \cong C_1C_4C\triangle$, így $B_1C_1 = \frac{2}{3} \cdot BC$.



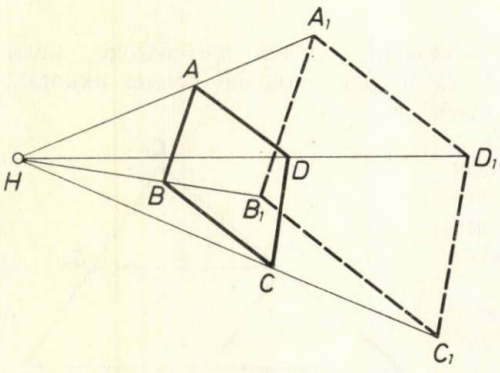
Szemléletes fokon most az AB_2C_2 háromszöget vágatjuk ki kartonból, és helyeztetjük rá a $C_2C_3C_1$, illetve a C_1C_4C háromszögekre, amely tevékenység tapasztalataként az előző összefüggéseket megállapítják a tanulók. Ekkor megmondjuk, hogy az előző példában az ABC háromszöget 2:1 *arányban nagyítottuk*, az utóbbi példában pedig az ABC háromszöget 2:3 *arányban kicsinyítettük*. — Ehhez mindkét esetben egy pontból történő *nyújtás*, illetőleg *zsugorítás* módszerét alkalmaztuk. Az eredeti tárgyalakzat és a kapott képalakzat közötti kapcsolatot (relációt) *hasonlóságnak* mondjuk. Most

$$ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle, \quad \text{így} \quad AB_1:AB = AC_1:AC = B_1C_1:BC = 2:3,$$

$$\alpha = \alpha_1; \quad \beta = \beta_1; \quad \gamma = \gamma_1.$$

A hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, a megfelelő szögek egyenlők.

Célszerű még a következő példát venni: Szerkesszünk egy $ABCD$ négyszöget és hozzá egy olyan $A_1B_1C_1D_1$ négyszöget, amelynek megfelelő oldalai úgy aránylanak az $ABCD$ négyszög oldalaihoz, mint 5:3.



A szerkesztést vagy elvégzik a tanulók, vagy a következő vázlattal irányíthatjuk:

$$\left.\begin{aligned} HA_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot HA \\ HB_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot HB \\ HC_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot HC \\ HD_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot HD \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A_1B_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot AB, \\ B_1C_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot BC, \\ C_1D_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot CD, \\ D_1A_1 &= \tfrac{5}{3}\cdot DA. \end{aligned}\right.$$

Indokolás az előző két példa tapasztalatai alapján:

$$ABCD\square \sim A_1B_1C_1D_1\square.$$

Most is igaz, hogy a két négyszög egymásnak megfelelő oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 5:3 (nagyítás), és a megfelelő szögek egyenlők. A két négyszög hasonló. Ugyanígy szerkeszthetünk hasonló öt-, hat- stb. szögeket. Magyarázatra szorul, hogy mit értünk *szakaszok arányán*. A tanulók tudják, hogy minden szakaszhoz tudunk mérőszámot rendelni, s ezért azt mondhatjuk, hogy *két szakasz arányán mérőszámaik arányát értjük. A megfelelő szögek:* Az egymásnak megfelelő szakaszok által bezárt szögek.

A középpontból történő nagyításról, kicsinyítésről (középpontos hasonlóságról) pedig a következőket mondhatjuk (a tevékenységgel szerzett tapasztalatok alapján):

a) Olyan eljárás (leképezés), amely pontoknak pontokat, egyeneseknek egyeneseket feleltet meg. Van egy *fix pontja* (helyben maradó pontja), amelyet a hasonlóság középpontjának (centrumának) mondunk.

b) *A hasonlóság középpontján átmenő egyenesek* helyben maradnak, a hasonlóság középpontján át nem menő egyenesek *velük párhuzamos egyenesekbe* mennek át.

c) Egy leképezésnél a középpontok távolsága és a megfelelő tárgypontok távolsága abszolút értékének aránya állandó, 0-tól különböző szám. Ha ez 1-nél nagyobb, akkor *nagyításról*, ha 1-nél kisebb szám, akkor *kicsinyítésről* beszélünk.
Az általános iskola 8. osztályaiban egyheti oktatással, jól kiválogatott feladatok megoldásával el lehet jutni az itt közölt tényanyag megértéséig. Megmondjuk a tanulóknak, hogy a középpontos hasonlóság előbb felsorolt tulajdonságait logikai következtetéssel is meg lehet állapítani. Erre középiskolai tanulmányaik során, esetleg szakköri foglalkozáson kerül sor.

2. *A részben szemléletes, részben deduktív tanítási fokon* még mindig alapul szolgál a geometriai ismeretszerzésben a szemlélet, a tapasztalat, de — alkalmas helyen, alkalmas módon — már felkeltjük a tanulók igényét a logikai bizonyításokra. A középiskolák II. osztályaiban *a középpontos hasonlóság és tulajdonságai törzsanyag, a hasonlósági transzformáció pedig kiegészítő anyag.* Ott *A hasonlóság és alkalmazásai* című témakör feldolgozására 6—8—10 órát lehet fordítani — az iskolatípustól függően.

Az egy fokkal igényesebb tárgyalás során felújítjuk a tanulók előző ismereteit, s a *középpontos hasonlóságot* mint a sík egy-egyértelmű leképezését szintén szerkesztési feladattal, problémával vezetjük be:

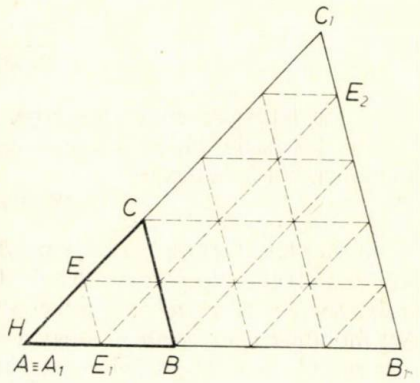
Szerkesszünk egy adott (szerkesztett) háromszöghöz ($ABC\triangle$) egy olyat ($A_1B_1C_1\triangle$-et), amelynek oldalai 2,5-szer akkorák, mint az ABC háromszög oldalai!

A tanulók — minden bizonnyal — javasolnak módszereket, s ezek között — valószínűleg — szerepelni fog a *középpontos hasonlóság* módszere is; akár úgy, hogy az ABC háromszög egy csúcsát, akár úgy, hogy a háromszög egy belső vagy külső pontját választják a hasonlóság centrumának. Rajzoltassuk meg mind a három esetet! Kerüljenek a táblára a rajzok!

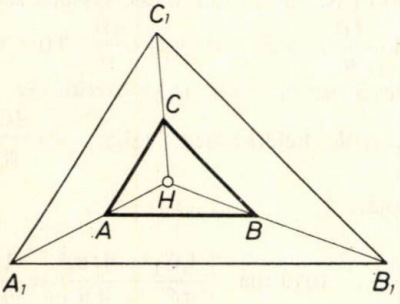
Mind a három esetben: $HB_1:HB = HC_1:HC = 2{,}5:1$.

A kérdés is mind a három esetben ugyanaz: pl. $B_1C_1 \parallel BC$ és $B_1C_1:BC = 2{,}5:1$ igaz-e?

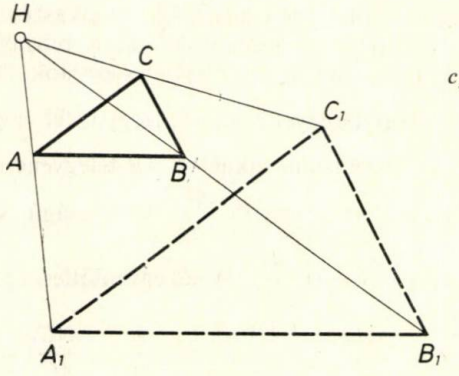
a)



b)



c)

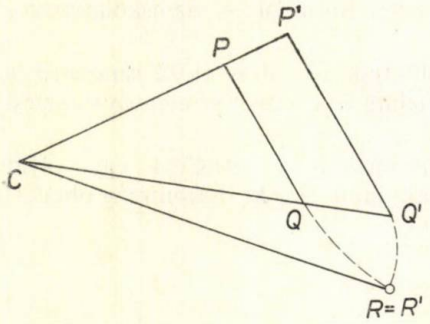


Vizsgáljuk meg részletesebben — most már a logikai következtetést is alkalmazva — *a középpontos hasonlóság tulajdonságait.* Hogy mozognak a pontok, egyenesek; mi történik a szakaszokkal, szögekkel? Elemezzük az ábrákat!

Mindhárom esetben a sík egy-egy pontja helyben maradt (H fix pont). A pontok a fix pontból kiinduló félegyeneseken úgy mozdultak el, hogy pl.

$$HB_1 = 2{,}5 \cdot HB; \quad HC_1 = 2{,}5 \cdot HC,$$

tehát a centrumból kiindult szakaszok *ugyanannyiszorosukra* változtak. Annak bizonyításához, hogy az egy egyenesen fekvő pontok képei egy egyenesen maradnak, tehát hogy az egyenesek képei egyenesek, a párhuzamos szelők tételére volna szükség. Ez azonban a gimnáziumokban nem tantervi anyag. Ezért nem vetjük fel a kérdést a tanulóknak problémaként. Elfogadják (mintegy axiómaként), hogy az *egyenes képe* — ennél a leképezésnél — *egyenes*, hiszen ez a centrumon átmenő egyenesek esetében a definícióból következik. Nem okozhat nehézséget annak bizonyítása, hogy *a centrumon át nem menő egyenesek képe velük párhuzamos egyenes:*



Ha ugyanis $CP' = \lambda \cdot CP$,

$CQ' = \lambda \cdot CQ$,

akkor nem fordulhat elő, hogy a PQ és $P'Q'$ egyenesek messék egymást, mert ha $\lambda \neq 1$, akkor — a leképezés egy-egyértelmű volta miatt — $CR' = \lambda \cdot CR'$ nem állhat fenn.

Ilyen tárgyalás esetén az, hogy két tárgyponton és a megfelelő két képponton átmenő két párhuzamos által a szögszárakból kimetszett szakaszok aránya egyenlő, a definícióból következik:

$$CP' : CP = CQ' : CQ = \lambda.$$

Hogyan láttathatjuk be, hogy pl. $B_1C_1 = 2{,}5 \cdot BC$ (l. az *a)* ábrát). Osszuk fel az AB szakaszt két egyenlő részre: $AB = 2 \cdot AE$. Ekkor $A_1B_1 = 5 \cdot AE$. Most AE az AB és A_1B_1 szakaszok *közös mértéke*, mindkét szakaszra egész számszor fér rá; $A_1B_1 : AB = 5 : 2$. Azt mondjuk ilyen esetben, hogy a két szakasz *összemérhető* (az arány racionális).

Húzzunk az osztópontokon át párhuzamosokat a BC, az AB és AC oldalakkal: csupa egybevágó háromszögek keletkeznek: $A_1C_1 = 5 \cdot AE_1$; $AC = 2 \cdot AE_1$; $B_1C_1 = 5 \cdot C_1E_2$; $BC = 2 \cdot C_1E_2$. Még egy-két ilyen konkrét példán keresztül beláttatjuk a tanulókkal azt, hogy a megfelelő szakaszok képei is 2,5-szer akkorák, mint a tárgyszakaszok. Igaz ez általánosan is; a bizonyítás mindig így történik, ha $A_1B_1 : AB = m : n = \lambda$, ahol m, n természetes számok, de akkor is, ha λ irracionális. Osszuk fel az AB szakaszt n egyenlő részre, s tegyük fel, hogy $k \cdot \frac{AB}{n} \leqq A_1B_1 < (k+1) \cdot \frac{AB}{n}$. Húzzunk BC-vel párhuzamosokat az AB félegyenesen levő osztópontokon keresztül. Az AC szögszáron is egyenlő $\frac{AC}{n}$ hosszúságú szakaszok keletkeznek, tehát: $k \cdot \frac{AC}{n} \leqq A_1C_1 < (k+1) \cdot \frac{AC}{n}$. A két egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{k}{n} \leqq \frac{A_1B_1}{AB} < \frac{k+1}{n}, \quad \text{és} \quad \frac{k}{n} \leqq \frac{A_1C_1}{AC} < \frac{k+1}{n}, \quad \text{továbbá} \quad \left| \frac{A_1C_1}{AC} - \frac{A_1B_1}{AB} \right| < \frac{1}{n},$$

és ugyanúgy látható be, hogy pl. $\left|\frac{B_1C_1}{BC} - \frac{A_1B_1}{AB}\right| < \frac{1}{n}$, ahol n akármilyen nagy természetes szám lehet. — A tanításban az igazolást csak konkrét racionális arányok esetén végezzük, s megmondjuk a tanulóknak, hogy a tétel általánosan is igaz, de a bizonyítást mellőzzük.

Mint eredményt szűrjük le, hogy ez a leképezés *szögtartó*, hiszen bármely két tárgyszakaszt tartalmazó szögszárat olyan két — a képszakaszt tartalmazó — szögszárba visz át, amelyek párhuzamosak az eredeti szögszárakkal. — Könnyen igazolható, hogy ez a leképezés *kört körbe visz át* (az igazoláshoz mindent előkészítettünk).

Vegyünk fel egy O középpontú, r sugarú kört, majd az O középponttól d távolságban egy H_1, illetve H_2 pontot; legyen

$\lambda = 2$, akkor

$H_1O_1 = 2 \cdot H_1O$.

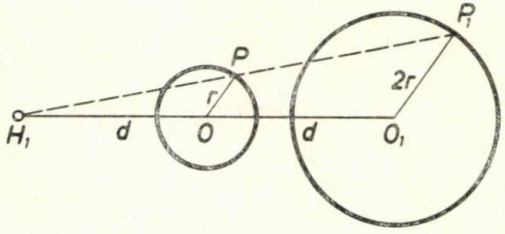
Ha

$O_1P_1 = 2 \cdot OP$ és $OP \parallel O_1P_1$,

akkor

$H_1P_1 = 2 \cdot H_1P$,

tehát P_1 a P pont képe.

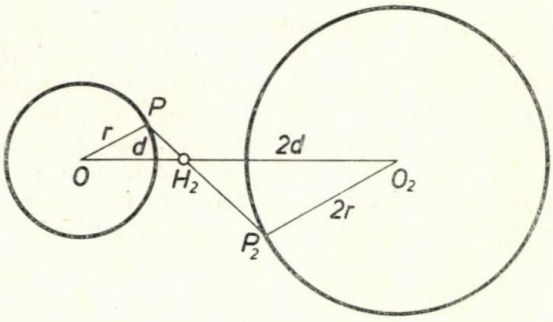


Mivel OP-t tetszőlegesen vettük fel, azért az O_1 középpontú $2r$ sugarú kör az O középpontú r sugarú kör képe.

Eljárhattunk volna azonban így is:

$$H_2O_2 = 2 \cdot H_2O; \quad OP \parallel O_2P_2; \quad O_2P_2 = 2 \cdot OP. \quad \text{(Most } |\lambda| = 2.\text{)}$$

S így $H_2P_2 = 2 \cdot H_2P$. A H_1 a két kör külső, H_2 a két kör belső hasonlósági pontja. Belátható, hogy a két kör közös külső érintői a külső, belső közös érintői pedig a belső hasonlósági ponton mennek keresztül. A belső és a külső hasonlósági pont helyzetére vonatkozó diszkusszió, valamint ezek szerkesztésének problémái már önálló munkák lehetnek a tanulók számára. Úgy vélem, hogy egy heti tanítás-tanulás eredményeként a tanulók elsajátíthatják a *középpontos hasonlóság* tulajdonságait a középiskolákban is, az egyes iskolatípusok egyes tanulói az általuk elérhető szinten.



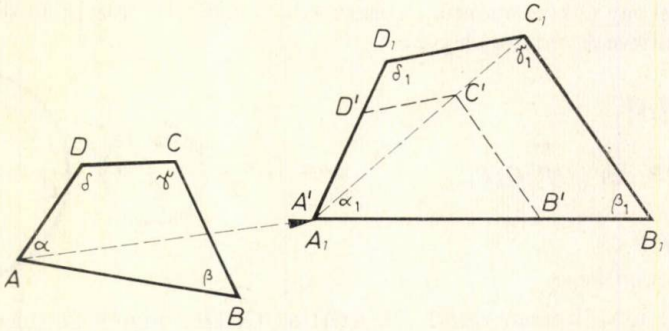
3. Ha az említett eredményt elértük, akkor a következő héten már sor kerülhet *az alakzatok közötti hasonlóság* és *a hasonlóság alkalmazásainak* tárgyalására. Ehhez hasznos előkészítés a középpontos hasonlóság tulajdonságainak megismerése. Mind az általános, mind a középiskolákban a még rendelkezésre álló egyheti tanítási idő alatt célszerű a következőkre kitérni:

A középpontos hasonlóságot alkalmazva, bármely geometriai alakzathoz olyan képalakzatot rendeltünk, amely *a tárgyalakzathoz hasonló*, tehát a két alakzat megfelelő szögei egyenlők, a megfelelő szakaszok (oldalak, átlók stb.) aránya pedig ugyanaz az állandó, nullától különböző szám.

Legyen most két olyan alakzatunk, háromszögünk, négyszögünk, ... sokszögünk,

amely eleget tesz az előbbi feltételeknek. Ha a két alakzat megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül, megfelelő szakaszai pedig párhuzamosak, akkor *egyik alakzat a másikból középpontos hasonlósággal nyerhető* (az előzők alapján nyilvánvaló). Ha ez nem áll fenn, akkor a következő utat járhatjuk: Legyen az $ABCD$ és az $A_1B_1C_1D_1$ két négyszög — az előbbi értelemben — hasonló, de megfelelő oldalaik nem párhuzamosak, megfelelő csúcsaikat összekötő egyenesek nem mennek át egy ponton.

Feltétel: $\alpha=\alpha_1$; $\beta=\beta_1$; $\gamma=\gamma_1$; $\delta=\delta_1$ és $A_1B_1:AB=B_1C_1:BC=C_1D_1:CD=D_1A_1:DA=3:2$.



Párhuzamos eltolással, majd A_1 körüli forgatással vigyük át az $ABCD$ négyszöget az $A'B'C'D'$ helyzetbe! A szerkesztés miatt $ABCD$ négyszög $\cong A'B'C'D'$ négyszög, és $A'B'C'D'$ négyszög $\sim A_1B_1C_1D_1$ négyszög, vagyis ha két alakzat megfelelő szögei egyenlők, megfelelő szakaszaik aránya megegyezik, akkor egyik a másikból egy egybevágósági és egy középpontos hasonlósági transzformációval nyerhető. Az egybevágósági transzformáció lehet: forgatás, eltolás, középpontos tükrözés, tengelyes tükrözés; illetőleg ezek valamilyen egymásutánja (összetevése), amelyekkel a két alakzat már olyan helyzetbe hozható, hogy megfelelő pontjaikat összekötő egyenesek egy ponton mennek át (vagy párhuzamosak), megfelelő szakaszaik pedig párhuzamosak. Két ilyen alakzatról azt mondjuk, hogy *hasonló helyzetűek*.

Két kör mindig olyan helyzetű, hogy a középpontjaikat összekötő egyenesen (a centrálisukon) mindig megszerkeszthető az a két pont — a belső és a külső hasonlósági pontjuk —, amelyekre vonatkozó középpontos hasonlósággal az egyik a másikra leképezhető.

4. Ezután már csak alkalmazni kell az eddigi ismereteket konkrét alakzatokra. Célszerű a háromszögek hasonlóságának fontosabb eseteit megbeszélni, mert a sokszögek hasonlóságát erre alapozva tárgyaljuk.

a) Két háromszög hasonló, ha két-két megfelelő szögük egyenlő;

b) két-két megfelelő oldaluk aránya és az ezek által közbezárt egy-egy szögük egyenlő;

c) két-két megfelelő oldaluk aránya és a nagyobb oldalakkal szemközti szögük egyenlő;

d) a három megfelelő oldaluk aránya egyenlő.

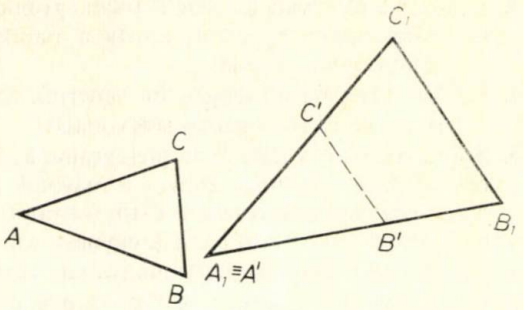
Az *a)*, *b)* esetekben — miután az ABC háromszöget az $A'B'C'$ helyzetbe hoztuk — elég a középpontos hasonlóság tulajdonságaira hivatkoznunk.

A *d)* esetben a következő egyszerű bizonyítás (igazolás) végezhető:

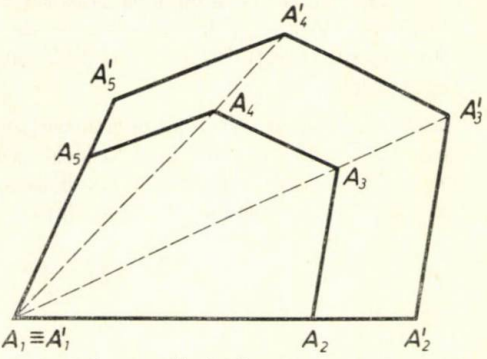
Feltétel: $AB:A_1B_1=BC:B_1C_1=CA:C_1A_1=3:5$.

Vegyük fel az A_1B_1, illetve A_1C_1 szögszárakon a $B'C'$ pontokat úgy, hogy $A'B'=$

$= AB$ és $A'C' = AC$ legyen. A párhuzamos szelők tétele megfordításából következik, hogy $B'C' \parallel B_1C_1$, és ezért $B'C' : B_1C_1 = 3:5 \ldots$, így $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$, s a hasonlóság tranzitív tulajdonsága miatt: $ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$.



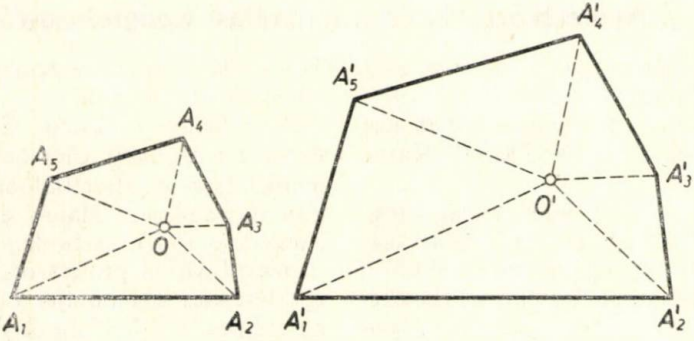
e) Egyenlő oldalszámú két sokszög hasonlósága esetén megfelelő szögeik egyenlők, megfelelő oldalaik aránya pedig megegyezik. Ebben az esetben ugyanis a két sokszög páronként hasonló háromszögekre bontható, pl. két — az előző feltételeket kielégítő — ötszög esetén: Hozzuk a két ötszöget az ábrán látható helyzetbe!



$A_1'A_2' : A_1A_2 = A_2'A_3' : A_2A_3$ és $A_2\sphericalangle = A_2'\sphericalangle$ miatt $A_1A_2A_3\triangle \sim A_1'A_2'A_3'\triangle$, stb. Nemcsak az A_1 pontból kiinduló átlókkal bonthatjuk fel a két sokszöget páronként hasonló háromszögekre, hanem a sokszögek belsejében felvett tetszőleges O pontból is:

Vegyük fel az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög belsejében az O pontot, kössük össze a csúcspontokkal.

Másoljuk le az $OA_1A_2\sphericalangle$-et és $OA_2A_1\sphericalangle$-et úgy, hogy $OA_1A_2\sphericalangle = O'A_1'A_2'\sphericalangle$ és $OA_2A_1\sphericalangle = O'A_2'A_1'\sphericalangle$. Ekkor $A_1A_2O\triangle \sim A_1'A_2'O'\triangle$. Egyszerűen belátható a többi részháromszögek hasonlósága is. (Például $A_1OA_5\triangle \sim A_1'O'A_5'\triangle$, mert $A_5A_1O\sphericalangle = A_5'A_1'O\sphericalangle$; $A_1A_5 : A_1'A_5' = A_1O : A_1'O'$ stb.)



f) Célszerű kiemelni, hogy két derékszögű háromszög hasonlóságához elegendő egy-egy hegyesszögük egyenlősége. A hasonló háromszögekben (sokszögekben) bármely, egymásnak megfelelő két távolság, magasság, szögfelező, súlyvonal aránya egyenlő a megfelelő oldalak arányával. Az egyenlő oldalszámú szabályos sokszögek mindig hasonlók.

III. *Megoldásra, gyakorlásra javasolt feladatok:*

1. Szerkesszünk négyzetet, ha adott (ismert) átlójának és oldalának különbsége!

2. Szerkesszünk az ABC háromszög C csúcsán átmenő olyan CC_1 egyenest, amely a háromszögből a hozzá hasonló ACC_1 háromszöget vágja le $(\gamma > \beta)$!

3. Szerkesszünk olyan, az *ABCD* (nem egyenlő oldalú) paralelogramma egyik oldalával párhuzamos egyenest, amely a paralelogrammából az *ABCD*-hez hasonló paralelogrammát vág le!
4. Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük az egyik oldalán fekvő két szögét és az ehhez az oldalához tartozó súlyvonalát!
5. Szerkesszünk egy *ABCD* paralelogrammát! Osszuk fel a *BC* oldalát három egyenlő részre! A *B* csúcstól számítva a második osztópont legyen *P*! Osszuk fel a *CD* oldalt négy egyenlő részre, a *C*-től számított első osztópont legyen *Q*! Határozzuk meg, milyen arányban osztják egymást az *AP* és *BQ* szakaszok!
6. Egy konvex szög szögtartományában vegyünk fel egy *P* pontot! Szerkesszünk olyan kört, amely átmegy a *P* ponton és érinti a szögszárakat!
7. Szerkesszünk egy *ABCD* konvex négyszöget! Szerkesszünk olyan rombuszt, amelynek szögpontjai rendre az *ABCD* négyszög oldalaira illeszkednek!
8. Egy *ABC* háromszög egymás után következő oldalainak aránya 4:5:6. Igazoljuk, hogy a háromszög legnagyobb szöge kétszer akkora, mint a legkisebb szöge! (Gimnázium érettségi feladata, 1975. május hó.) (A megoldás a **2.** feladat alapján egyszerű.)

A tankönyvekben és feladatgyűjteményekben sok jó feladat van. Válogassunk a feladatok közül úgy, hogy a tanulók számára érdekes, változatos, tanulságos legyen. Ehhez az szükséges, hogy ne csak a szerkesztéseket végezzék el a tanulók, hanem kívánjuk meg a szerkesztés indokolását és magasabb fokon a diszkussziót is.

GÁDOR ENDRÉNÉ
egyetemi adjunktus, BME

Rövid beszámoló a 3. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról

Az ICMI (International Commission for Mathematical Instruction) 1976. augusztus 16. és 21. között rendezte meg 3. kongresszusát az NSZK-beli Karlsruheban.

A kongresszusnak igen gazdag programja volt. Ennek az lett a következménye, hogy egy-egy résztvevő ebből a gazdag programból elég keveset élvezhetett, mivel egy időben csak egy helyen lehetett.

A kongresszust 16-án délután nyitotta meg — a sok üdvözlés után — *Sir James Lighthill* Cambridge-i professzor. Előadásának címe *A matematika és a társadalom kölcsönhatása* volt. Ezenkívül még négy plenáris ülést tartottak. Ezek előadói és az előadások címei:

Michael F. Atiyah professzor, Oxford: Tendenciák a tiszta matematika fejlődésében. (VIII. 18-án de.)

Peter Hilton professzor, Case Western Reserve University, Cleveland: A matematika és a természettudományok tanítása napjainkban. Hamis ellentétpárok elterjedése. (VIII. 18-án de.)

Arnold Kirsch professzor, Kassel: Az egyszerűsítés szempontjai a matematikai nevelésben. (VIII. 19-én de.)

Georges Guilbaud professzor, Paris: Matematika és közelítés. (VIII. 19-én de.)

Ezeket az előadásokat a Schwarzwaldhalle nevű óriási előadóteremben tartották — ahova a kb. 2300 főnyi hallgatóság be is fért —, német, francia és angol nyelvű szimultán tolmácsolással.

Kedden, 17-én és pénteken, 20-án szekcióülések voltak, délelőtt az ún. *A* so-

rozat, délután a *B* sorozat. Ezeket az egyetem előadótermeiben tartották. A Karlsruhe-i műegyetem a legrégibb műegyetem az NSZK-ban. Több speciális iskola egyesítéséből jött létre. Az 1768-ban alapított Ingenieurschule, az 1807-ben alapított Architektonische Zeinhenschule, valamint egyéb iskolák egyesítéséből hozták létre 1825-ben az ún. Polytechnische Schule-t. Ebből lett 1832-ben a Technische Hochschule, ez állandóan bővült és terjeszkedett. Mai nevét (Universität von Karlsruhe) 1967-ben kapta. Ezen az egyetemen működött Benz és Hertz.

Az *A* sorozatban ugyanabban az időben hat szekcióban folytak ülések. Ezek a különböző korú tanulók matematikai nevelésével foglalkoztak: 1. 4—12 évesek; 2. 10—16 évesek; 3. 15—20 évesek; 4. matematikai nevelés az egyetemeken és a tanárképző főiskolákon; 5. felnőttoktatás és folyamatos tanulás, beleértve a levelező és televíziós oktatást is; 6. a matematikatanárok gyakorlata és szakmai élete.

A *B* sorozat témái: 1. a matematika tantervek fejlődésének kritikai elemzése; 2. az értékelés módszerei és eredményei a matematikatanítás szempontjából; 3. a matematikatanítás céljai (miért tanítunk matematikát?); 4. a matematikatanulás folyamatára vonatkozó kutatások; 5. a matematikatanításban alkalmazott segédletek kritikai elemzése; 6. a matematika és a többi tantárgy kölcsönhatása; 7. az algoritmusok és számítógépek szerepe az iskolai matematikatanításban.

Nehéz volt választani a sok érdekes téma közül. Végül is az A_2 és a B_3 szekció mellett döntöttem. Remélhetőleg hamarosan elkészül a kongresszusi előadásokat tartalmazó kötet, és majd elolvassuk mindazt, amit nem tudtunk meghallgatni.

Minden szekcióban volt egy bevezető előadás, amelyet készítője 30—50 oldal terjedelemben le is írt, de az ülésen csak röviden ismertetett. Ezután következtek az előre felkért hozzászólók. Minthogy a szekcióüléseken tolmácsolás nem volt, az elnökség valamelyik tagja fordított is, így a spontán hozzászólásokra — legalábbis abban a két szekcióban, amelyben én vettem részt — nem, vagy alig került sor.

A szekcióülések után különböző munkacsoportok üléseztek, amelyek részben még az előző, Exeterben megtartott kongresszuson kezdték el a munkájukat (a valószínűség és statisztika tanításáról, a matematikatanulás pszichológiájáról stb.). Voltak csoportok, ahol az egyes országokban létrehozott kísérleti terveket ismertették. Bemutattak tankönyveket, munkafüzeteket, technikai segédeszközöket, kisfilmeket.

Az egyetem rektora fogadást adott 17-én este a résztvevők számára. Szerdán, 18-án délután autóbuszkirándulásokat rendeztek azok részére, akik elég szerencsések voltak, és hozzájutottak autóbuszjegyhez. Én magam egy heidelbergi kiránduláson vettem részt.

19-én este hangversenyt rendeztek a kongresszus résztvevőinek, pontosabban egy részüknek, mert a színházterem, ahol a hangversenyt tartották, mindössze ezer főt tudott befogadni. A Stuttgarti Rádió zenekara játszott, Uri Segal vezényletével.

A kongresszus záróülését 21-én, szombaton délelőtt tartották. Hat felkért szakember vitatta meg azt a kérdést, hogy mit jelentenek majd a jövőben a számító- és számológépek (computers and calculators) a matematikai nevelésben. Ezután az ICMI vezetősége bezárta a kongresszust.

Tanulságok: Egy ilyen kongresszus jó alkalom arra is, hogy a hivatalos előadásokon kívül, magánbeszélgetésekből megtudja az ember, mi történik más országokban a matematikatanítás korszerűsítése terén. Számomra az volt a nagy tanulság, hogy általában másutt sincsenek előbbre, mint mi, sőt nekünk is lenne nagyon sok mondanivalónk mások számára. Nem szabad túlságosan szerénynek lennünk. Sajnálom, hogy ezen a kongresszuson csak nagyon keveset beszéltünk arról, hogy miket csinálunk, milyen gondjaink és eredményeink vannak.

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv.

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74. IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is! Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő második számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

849. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2} = 1977$$

egyenletnek tetszőleges y_i $(i=1, 2, 3, 4)$ pozitív egész számokhoz van nem negatív egész számokból álló (x_1, x_2, x_3, x_4) megoldása!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

850. Bizonyítsuk be, hogy az x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ pozitív számokra mindig teljesül a

$$\sum x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_r} \leqq \frac{1}{n}\binom{n}{r}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$$

egyenlőtlenség, ahol a bal oldalon az összegezés az x_i számok összes különböző r-tagú kombinációjának szorzatára vonatkozik.

Geőcze Zoárd, Antal László, Cataguases (Brazília)

851. Igazoljuk, hogy ha $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, akkor mindig teljesül a

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\sin\gamma+\sin\beta\cdot\sin\delta$$

egyenlet.

Róka Sándor, Tiszavasvári

852. Egy paralelepipedonba beírt tetraéder lapsíkjai a paralelepipedonból négy tetraédert metszenek le. A paralelepipedon térfogatának mekkora része annak a tetraédernek a térfogata, amelynek csúcsai a levágott tetraéderek súlypontjai?

Fitos László, Nyíregyháza

853. Igazoljuk, hogy ha a háromszög magasságai m_a, m_b, m_c, és tetszőleges belső pontjának távolsága a megfelelő oldalegyenesektől t_a, t_b, t_c, akkor

$$m_a m_b m_c \geqq 27 t_a t_b t_c.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

854. Mi a mértani helye azon adott hosszúságú szakaszok felezőpontjainak, amelyek két adott kitérő egyenes egy-egy pontját kötik össze?

Kamarás Lajos, Pécs

Feladatmegoldások (837—842.)

837. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan számtani sorozat létezik, amelynek tagjai pozitív egész számok, tagjainak száma $n-1$ ($n>1$), és az $n-1$ tag szorzata teljes n-edik hatvány!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

(Rokon feladat jelent meg lapunk 1976. évi 1. számában.)

I. megoldás: A feladat szerint tetszőlegesen adott 1-nél nagyobb pozitív egész n-hez végtelen sok $n-1$ tagú számtani sorozatot kell találnunk úgy, hogy

$$x(x+y)(x+2y)\dots[x+(n-2)y] = z^n \tag{1}$$

teljesüljön, ahol x és z pozitív egész, y pedig olyan egész szám, hogy mind az $n-1$ tag pozitív egész legyen. Ha (1)-et kielégíti egy számtani sorozat, akkor a fordított sorrendben vett tagok is megoldást adnak, elég tehát csak pl. a növekedő sorozatokra gondolni.

Próbáljuk tehát előállítani (1)-nek végtelen sok (x, y, z) pozitív egész számokból álló megoldását. Hogy a bal oldalon x-nek magas kitevőjű hatványa lépjen fel, kíséreljük meg y-t $k\cdot x$ alakban keresni, ahol k pozitív egész szám. Ekkor (1) bal oldalát az $n>2$ esetben

$$x^{n-1}(1+k)(1+2k)\dots[1+(n-2)k]$$

alakban írhatjuk. Ha még z helyére is x-et próbálunk helyettesíteni, akkor az (1) egyenlet speciális esete, az

$$x^{n-1}(1+k)(1+2k)\dots[1+(n-2)k] = x^n \tag{2}$$

egyenlet áll előttünk, amelynek x-ben és k-ban pozitív egész megoldásait nézzük.

Ha x helyébe az

$$x = (1+k)(1+2k)\dots[1+(n-2)k] \tag{3}$$

értéket írjuk, akkor ez kielégíti (2)-t, mégpedig n-től függetlenül tetszőleges pozitív egész k-val.

Visszatérve (1)-hez, a (3) alatti x értékhez válasszuk az

$$y = k(1+k)(1+2k)\dots[1+(n-2)k] \tag{4}$$

értéket, továbbá z helyett is a (3) alatti x-et írjuk be, akkor így végtelen sok, a feltételeknek megfelelő számtani sorozatot találtunk.

Már csak az $n=2$ eset van hátra. Nyilvánvaló, hogy az $x=z^2$ egyenletet végtelen sok egytagú számtani sorozat kielégíti pozitív egész z-vel együtt, ti. az $x=k^2$ négyzetszámok $z=k$-val, ahol k tetszőleges pozitív egész szám.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Bogdán Zoltán, Cegléd, Szánthó Gyula, Gyula és Viglas Tibor, Zseliz

II. megoldás: Keressünk végtelen sok megfelelő számtani sorozatot 0 differenciával! Ekkor (1)-nek ezt a speciális esetét kell vizsgálnunk:

$$x^{n-1} = z^n. \tag{5}$$

Ha x helyébe k^n-t írunk, az n-től függetlenül tetszőleges k pozitív egész számmal, akkor hozzá $z=k^{n-1}$-t véve kielégítik (5)-öt. Ezzel megoldottuk a feladatot.

Bartha Gábor, Szentendre és Filakovszky Péter, Érsekújvár

III. megoldás: Keressünk (1)-hez olyan megoldásokat, hogy $y=x$ legyen. Ekkor (1)-nek

$$x^{n-1}(n-1)! = z^n \tag{6}$$

speciális esetét vizsgáljuk. Ha x helyébe az

$$x = k^n(n-1)!$$

értéket írjuk, az n-től függetlenül tetszőleges pozitív egész k-val, akkor (6) bal oldalára a

$$[k^n(n-1)!]^{n-1}(n-1)! = [k^{n-1}(n-1)!]^n$$

egyenlet azonosan teljesül, tehát a (6)-ban szereplő z-re a

$$z = k^{n-1}(n-1)!$$

érték megfelel. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely, Kamarás Lajos, Pécs és Likai László, Eger

Megoldók száma: 12.

838. Bizonyítsuk be, hogy a $(\sqrt{2};\ \sqrt{3})$ középpontú körök bármelyike legfeljebb egy rácsponton megy át!

Megoldás: Derékszögű koordináta-rendszerben rácspontoknak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.

Tegyük fel, hogy van olyan $(\sqrt{2};\ \sqrt{3})$ középpontú r sugarú kör, amely tartalmaz két különböző rácspontot, a $P_1(a, b)$ és $P_2(c, d)$ pontokat. Ebből a feltevésből megpróbálunk ellentmondáshoz jutni.

A feltevésből következik, hogy $a \neq c$ vagy $b \neq d$, és hogy P_1 és P_2 koordinátáira teljesül az

$$(a-\sqrt{2})^2+(b-\sqrt{3})^2 = r^2,$$

illetve a

$$(c-\sqrt{2})^2+(d-\sqrt{3})^2 = r^2$$

egyenlet. Ezekből következik az

$$(a-\sqrt{2})^2+(b-\sqrt{3})^2 = (c-\sqrt{2})^2+(d-\sqrt{3})^2,$$

és a vele ekvivalens

$$2\sqrt{2}(a-c)+2\sqrt{3}(b-d) = a^2+b^2-c^2-d^2 \tag{1}$$

egyenlet fennállása.

Az $a=c$ esetben feltevéseink értelmében $b \neq d$, ezért (1)-ből következik

$$\sqrt{3} = \frac{b+d}{2}$$

igaz volta, ami ellentmondás, mert a jobb oldal racionális szám.

A $b=d$ esetén $a \neq c$, és ekkor (1)-ből arra jutunk, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{a+c}{2}$$

igaz, de ez is ellentmondás.

Az $a \neq c$ és $b \neq d$ esetben írjuk fel (1)-et röviden

$$e_1\sqrt{2}+e_2\sqrt{3} = e_3$$

alakban (e_1 és e_2 0-tól különböző egész szám, e_3 egész szám), akkor a két oldal négyzetének egyenlőségéből következik a

$$\sqrt{6} = \frac{e_3^2-2e_1^2-3e_2^2}{2e_1e_2}$$

egyenlet teljesülése, de ez is lehetetlenség.

Tehát feltevésünkből minden lehetséges esetben ellentmondáshoz jutottunk, és ez a feladat állításának helyességét bizonyítja.

Kamarás Lajos, Pécs és Szánthó Gyula, Gyula

Megjegyzés: A bizonyításban P_1 és P_2 koordinátáiról csak annyit használtunk fel, hogy racionálisak, ezért a tétel nemcsak rácspontokra, hanem racionális koordinátájú pontokra is érvényes.

Nyilvánvaló, hogy végtelen sok olyan $(\sqrt{2};\ \sqrt{3})$ középpontú kör van, amely tartalmaz rácspontot (illetve az előbbi megjegyzésből általánosítva racionális koordinátájú pontot), és végtelen sok olyan, amely nem, sőt a belsejében sem tartalmaz rácspontot (ti. az elég kis sugarú körök).

Kamarás Lajos, Pécs és Szilágyi István, Esztergom

Megoldók száma: 17.

839. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív számokra azonosan teljesül az

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \tag{1}$$

egyenlőtlenség!

I. megoldás: Az egyenlőtlenség szimmetrikus az a, b, c változókra, ezért elég $a \geqq b \geqq c > 0$ esetére végezni a bizonyítást, hiszen az más nagyságviszonyokra is érvényes lesz a szimmetriából következően.

Vizsgáljuk (1) bal és jobb oldalának különbségét, és hajtsuk végre rajta a következő átalakításokat:

$$a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-ab^2-b^2c-bc^2-c^2a-ca^2 =$$

$$= (a^3-a^2b-ab^2+b^3)+c(3ab-a^2-b^2-ac-bc+c^2) =$$

$$= a^2(a-b)-b^2(a-b)-c(a-b)^2+c(a-c)(b-c) =$$

$$= (a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c).$$

A feltevések figyelembevételével az utolsó összeg mindkét tagja nem negatív, tehát (1) teljesül.

Ha $a=b=c$, akkor az egyenlőség érvényes. Fordítva, ha a legutóbbi összeg értéke 0, akkor

$$(a-b)^2(a+b-c) = 0 \quad \text{és} \quad c(a-c)(b-c) = 0$$

teljesül, azaz (tekintetbe véve, hogy $c>0$)

$$a = b \quad \text{vagy} \quad a+b = c, \quad \text{továbbá} \quad a = c \quad \text{vagy} \quad b = c,$$

azaz

1. $a=b$ és $a=c$ vagy
2. $a=b$ és $b=c$ vagy
3. $a+b=c$ és $a=c$ vagy
4. $a+b=c$ és $b=c$.

Az 1. és a 2. eset $a=b=c$-re vezet, a 3.-ból $b=0$, a 4.-ből $a=0$ következik, ami ellentmondás. Tehát az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $a=b=c$.

Bartha Gábor, Szentendre, Kamarás Lajos, Pécs és Makora Tiberiu, Szatmár

II. megoldás: Az $a \geqq b \geqq c > 0$ relációt szem előtt tartva fejezzük ki a-t és b-t c-vel

$$a = c(1+x), \quad \text{illetve} \quad b = c(1+y)$$

alakban, ahol x és y nem negatív szám. Osszuk (1) mindkét oldalát a pozitív c^3-nal, így a bizonyítandóval ekvivalens

$$1+(1+x)^3+(1+y)^3+3(1+x)(1+y) \geqq$$

$$\geqq (1+x)(1+y)(2+x+y)+(1+y)(2+y)+(1+x)(2+x),$$

majd az

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2+x^2+y^2-xy \geqq 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenséghez jutnak. Ezt így alakíthatjuk át:

$$(x-y)^2(1+x+y)+xy \geqq 0. \tag{3}$$

Ezzel tulajdonképpen az I. megoldásban előállított egyenlőtlenséghez jutottunk, de csak két változót kellett figyelnünk. A (3) nyilvánvalóan teljesül; azt, hogy mikor érvényes az egyenlőség, az I. megoldáshoz hasonlóan vizsgálhatjuk meg.

Szánthó Gyula, Gyula

III. megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenséget redukáljuk 0-ra. Az $a \geqq b \geqq c > 0$ feltevéssel élve állítsuk elő a, b és c különbségeit. Azonos átalakításokkal az

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geqq 0 \tag{4}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A feltevések következtében a bal oldal első és harmadik tagja nem negatív, a második viszont nem pozitív, ezért ezt csatoljuk pl. az első taghoz:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a) = (a-b)(a(a-c)-b(b-c))$$

azonosan teljesül. A feltevésekből következik

$$a(a-c) \geqq b(b-c)$$

teljesülése, ennélfogva az állítás bizonyítva van.

Ha $a=b=c$ érvényes, akkor egyenlőség áll fenn. Fordítva, tegyük fel, hogy (4)-ben az egyenlőség érvényes, azaz

$$(a-b)[a(a-c)-b(b-c)]+c(c-a)(c-b) = 0$$

igaz, akkor mindkét tag nem negatív, azaz

1. $a=b$ és $c=a$ vagy 2. $a=b$ és $c=b$ vagy

3. $a(a-c)=b(b-c)$ és $c=a$ vagy 4. $a(a-c)=b(b-c)$ és $c=b$

teljesül. Mind a négy lehetőség az $a=b=c$ relációhoz vezet, megegyezésben az I. megoldással.

Papp László, Karcag és Vermes Miklós, Budapest

Megoldók száma: 9.

840. Fejezzük ki a tetraéderbe írt gömb sugarát a tetraéder éleivel!

Megoldás: A feladat síkbeli analogonja közismert: a háromszögbe írható kör ϱ sugarára érvényes a

$$\varrho = \frac{t}{s} \tag{1}$$

összefüggés, ahol a háromszög t területét és s félkerületét könnyen kifejezhetjük az oldalakkal.

Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderbe írt gömb ϱ sugarára és az m_i $(i=1, 2, 3, 4)$ magasságokra ismeretes az

$$\frac{1}{\varrho} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{m_i} \tag{2}$$

összefüggés (l. pl. Horvay—Reiman: Geometriai feladatok gyűjteménye I., Tankönyvkiadó, Bp., 1970., 1988. feladat). A magasságok viszont a térfogattal és a megfelelő lap területével vannak egyszerű kapcsolatban:

$$\frac{1}{m_i} = \frac{t_i}{3V}, \tag{3}$$

ahol V a tetraéder térfogata, t_i pedig az A_i csúccsal szemközti lap területe. A t_i területek Hérón tétele segítségével könnyen kifejezhetők az $A_iA_j=a_{ij}$ $(i\neq j)$ élekkel, úgyhogy már csak a térfogatot kell az élekből előállítani. A V-t élvektorok vegyes szorzata alapján determinánssal írhatjuk fel igen áttekinthető alakban, pl. így:

$$V = \sqrt{\frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

ahol $a_{ij}=a_{ji}$ (l. Hajós: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Bp., 1960., 318. oldal).

Ismeretes, hogy a háromszög területét nemcsak Hérón tétele adja meg az oldalakkal, hanem determinánssal is kifejezhetjük. A (4) alattival analóg képlet az a_{12}, a_{23}, a_{31} oldalú háromszög területére ez:

$$t = \sqrt{-\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}} \tag{5}$$

(l. Hajós idézett műve 314. oldal).

A (2) és a (3) alatti összefüggésekből most már

$$\varrho = \frac{3V}{F} \tag{6}$$

adódik, ahol F a tetraéder felszíne. Ez (1)-gyel rokon alakúvá válik, ha bevezetjük a

$$H = \frac{F}{3}$$

elölést. Ez zel (6) a

$$\varrho = \frac{V}{H} \tag{7}$$

alakot ölti.

Nagyon esetlegesnek tűnik azonban, hogy F-nek éppen a harmadát szerepeltessük. Tökéletesebb lesz az analógia (1) és (7) között, ha (1)-ben s helyett a kerületet, t helyett $2t$-t léptetjük fel ($2t$ a háromszög meghatározta paralelogrammaterület), a (7)-nél pedig F helyett $2F$-et (mint négy paralelogramma területének összegét) és $6V$-t (mint a tetraéder meghatározta paralelepipedon-térfogatot). Ilyen módon az

$$s = \frac{k}{2} = \frac{o_1+o_2+o_3}{2}, \quad t = \frac{p}{2}, \quad \text{illetve} \quad F = \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{2}(p_1+p_2+p_3+p_4), \quad p_i = 2t_i, \quad V = \frac{P}{6}$$

jelölésekkel (1)-ből a

$$\varrho = \frac{p}{k} = \frac{p}{o_1+o_2+o_3}, \tag{8}$$

(7)-ből pedig a

$$\varrho = \frac{P}{\Phi} = \frac{P}{p_1+p_2+p_3+p_4} \tag{9}$$

összefüggéshez jutunk.

A (8)-at az (5) segítségével így írhatjuk fel:

$$\varrho = \frac{\sqrt{-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 \end{vmatrix}} + \sqrt{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{23}^2 \\ 1 & a_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}} + \sqrt{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{13}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & 0 \end{vmatrix}}},$$

a (9) összefüggést pedig hasonlóan, ha P helyébe (4) alapján ezt írjuk:

$$P = 6V = \sqrt{\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}},$$

p_1 helyébe pedig ezt:

$$p_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}},$$

és p_2, p_3, p_4 helyébe az ugyanilyen szerkezetű megfelelő kifejezést.

Megoldók száma: 8.

841. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{(\cos x-\sin x)(1+2\sin x)}{\cos x}+2=0. \tag{1}$$

I. megoldás: Az egyenlet értelmezési tartománya $T=\mathbf{V}\setminus\mathbf{H}$, ahol $\mathbf{V}$ a valós számok halmaza, és

$$\mathbf{H}=\{x:\ \cos x=0\},$$

azaz

$$\mathbf{H}=\left\{x:\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ \ (k\in\mathbf{E})\right\}$$

($\mathbf{E}$ az egész számok halmaza). Az értelmezési tartományban $\cos x\neq 0$, tehát T-ben az (1)-gyel ekvivalens a tört eltávolításával adódó

$$(\cos x-\sin x)(1+2\sin x)+2\cos x=0 \tag{2}$$

egyenlet. Bontsuk fel a zárójeleket! A bal oldalon keletkező összeg két tagjából emeljünk ki $\sin x$-et, $\sin^2 x$ helyébe írjunk $1-\cos^2 x$-et, és szorozzuk ezt tagonként -2-vel. Ilyen módon a

$$2\cos^2 x+3\cos x-2+\sin x(2\cos x-1)=0 \tag{3}$$

egyenlethez jutunk. Az első három tag összege $\cos x$ másodfokú polinomja, ez szorzattá alakítható:

$$(2\cos x-1)(2+\cos x)+\sin x(2\cos x-1)=0.$$

Kiemeléssel ezt az egyenletet kapjuk:

$$(2\cos x-1)(\sin x+\cos x+2)=0. \tag{4}$$

Az első tényező zérushelyei V-ben a $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{E})$ értékek, mivel pedig ezek nem tartoznak H-hoz, ezért mind T-ben vannak. Mivel ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, ezért ezek (1)-nek is megoldásai.

A (4) alatti egyenlet bal oldalának második tényezője mindig pozitív ($\sin x\geqq -1$ és $\cos x\geqq -1$ miatt az összegük csak úgy lehetne -2, ha egyszerre felvehetnék a -1 értéket), ezért ebből nem kapunk megoldást.

Tehát az (1) egyenlet igazsághalmaza:

$$\mathbf{I}=\left\{x:\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\ \ (k\in\mathbf{E})\right\}.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely és Kun Péter, Szentendre

II. megoldás: Tegyük fel, hogy x_0 kielégíti az (1) egyenletet. Akkor x_0-ra teljesül a (3) alatti, illetve a belőle nyerhető

$$2\cos^2 x_0+(2\sin x_0+3)\cos x_0-(2+\sin x_0)=0$$

egyenlet is. Ebből $\cos x_0$-ra a másodfokú egyenlet megoldóképletével $\frac{1}{2}$-et, illetve $-\sin x_0-2$-t kapunk. Ezekből arra következtethetünk, hogy csak az $x_0=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{E})$ számok lehetnek az (1) megoldásai. Behelyettesítés mutatja, hogy ezek mind kielégítik az adott egyenletet, tehát ezek alkotják (1) igazsághalmazát.

Kurcsics László, Csorna

III. megoldás: A (2) alatti egyenletet

$$\cos x(3+2\sin x)=\sin x(1+2\sin x)$$

alakra hozva emeljük mindkét oldalát négyzetre, majd $\cos x$-et küszöböljük ki. Ilyen módon a

$$8y^4+16y^3+6y^2-12y-9=0 \tag{5}$$

egyenlethez jutunk, ahol $y=\sin x$. Minthogy (1)-et $x=\pm\frac{\pi}{3}$ kielégíti — ezt grafikus ábrázolással vagy próbálgatással megtalálhatjuk —, ezért (5) bal oldalából kiemelhetjük az $y-\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $y+\frac{\sqrt{3}}{2}$ gyöktényezők szorzatát, $y^2-\frac{3}{4}$-et. Ekkor (5) az

$$\left(y^2-\frac{3}{4}\right)(2y^2+4y+3)=0$$

alakot ölti. Ebből már könnyen megállapíthatjuk az (1) egyenlet összes lehetséges megoldását; ha figyelembe vesszük, hogy $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\cos x=-\frac{1}{2}$-del nem elégíti ki (1)-et, akkor a még megmaradó lehetséges megoldások behelyettesítéssel valóban megoldásoknak is bizonyulnak.

Likai László, Eger és Wekszli Árpád, Csorna

IV. megoldás: Ha az (1) egyenletet a vele ekvivalens

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+2\sin x)+2=0$$

alakban írjuk fel, és a

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2} \tag{6}$$

helyettesítéseket alkalmazzuk, akkor a

$$3t^4+6t^3+8t^2-2t-3=0 \tag{7}$$

egyenlethez jutunk. Minthogy itt t $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-t jelent, meg kell vizsgálnunk az értelmezési tartomány esetleges változásait. A (6) alatti törtek nincsenek értelmezve, ha $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, azaz ha $x=\pi+2\pi k$ ($k\in\mathbf{E}$), viszont $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ ezeken a helyeken értelmezve van; az $1-t^2=0$ egyenlet vizsgálata már nem hoz egyéb változást. Ha tehát a $\pi+2\pi k$ számok valamelyike (1)-nek megoldása volt, akkor a (6) helyettesítéssel ezt elveszítjük. A $\pi+2\pi k$ értékek (1)-be való behelyettesítése mutatja, hogy ez a gyökvesztés nem következett be. Ezek után — mivel a (6) helyettesítéskor fellépő törtek eltávolítása nem okoz gyökvesztést — vizsgálhatjuk a (7) egyenletet. Próbálgatással, vagy a $\pm\frac{\pi}{6}$ gyökök megtalálása után szorzattá alakíthatjuk (7) bal oldalát:

$$(3t^2-1)(t^2+2t+3)=0,$$

és ezen az úton is megkaphatjuk a kitűzött egyenlet összes megoldását.

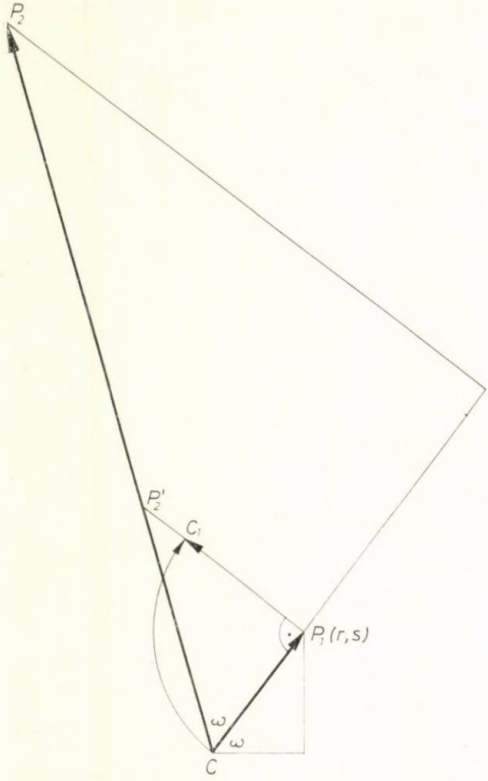
Dudás Rozália, Szeged és Papp László, Karcag

Megoldók száma: 16.

842. Bizonyítsuk be, hogy ha r, s; k, l pozitív egész számok és $(r, s)=1$, $r>1$, $s>1$, továbbá $\operatorname{tg}\omega=\frac{s}{r}$, akkor $k\omega\neq 2\pi l$. (Vö. A Matematika Tanítása XXIII. évf. 1. szám, 1976. február, 9—14. oldal.)

Kárteszi Ferenc, Budapest

Megoldás: Legyen a C kezdőpontú derékszögű koordináta-rendszerben a $\mathbf{p}_1(r, s)$ helyvektorú pont P_1, C-nek P_1 körüli $-\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottja $C_1(u_1, v_1)$, és a $\overrightarrow{P_1C_1}$ $\frac{s}{r}$-szeresével állítsuk elő a $\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\frac{s}{r}\overrightarrow{P_1C_1}$ helyvektorú P_2' pontot, majd a $\mathbf{p}_2=r\mathbf{p}_2'$ helyvektorú P_2 pontot. Ugyanígy folytatva legyen C-nek P_k körüli $-\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottja $C_k(u_k, v_k)$, és a P_{k+1}' pont helyvektora



$\mathbf{p}'_{k+1} = \mathbf{p}_k + \frac{s}{r}\overrightarrow{P_k C_k}$, a P_{k+1} ponté pedig $\mathbf{p}_{k+1} = r\mathbf{p}'_{k+1}$, ahol

$$\mathbf{p}_k = (x_k, y_k), \quad \mathbf{p}'_{k+1} = (x'_{k+1}, y'_{k+1}),$$

továbbá

$$\mathbf{p}_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Minthogy $\overrightarrow{P_k C} = -\mathbf{p}_k = (-x_k, -y_k)$, ezért

$$\overrightarrow{P_k C_k} = (-y_k, x_k),$$

és

$$\mathbf{p}'_{k+1} = \mathbf{p}_k + \frac{s}{r}(-y_k, x_k) = (x_k, y_k) + \frac{s}{r}(-y_k, x_k) = \left(x_k - \frac{s}{r}y_k, y_k + \frac{s}{r}x_k\right),$$

továbbá

$$\mathbf{p}_{k+1} = r\mathbf{p}'_{k+1} = (rx_k - sy_k, sx_k + ry_k).$$

Tehát tetszőleges k pozitív egész számra érvényes:

$$(T) \quad \begin{matrix} x_{k+1} = rx_k - sy_k \\ y_{k+1} = sx_k + ry_k \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} r & -s \\ s & r \end{vmatrix} = r^2 + s^2 = D.$$

Minthogy $(x_1, y_1) = (r, s)$, ezért a nyert előállításból nyilvánvaló, hogy P_{k+1} rácspont, és az is, hogy a $\mathbf{p}_{k+1}$ vektornak az $\mathbf{i}$ bázisvektorral bezárt szöge $(k+1)\omega$.

A $k\omega \neq 2\pi l$ állítást azzal bizonyítjuk, hogy kimutatjuk: minden k-ra $y_k \neq 0$.

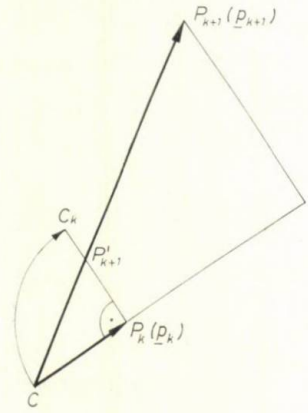
Az $y_k \neq 0$ állítást azzal igazoljuk, hogy először a következőt mutatjuk meg:

(1) $$y_k \not\equiv 0 \pmod{D},$$

azaz, hogy

(2) $$D \nmid y_k,$$

ennek már következménye lesz az $y_k \neq 0$ állítás érvényessége.



A (T) alapján

$$P_1(r, s),$$
$$P_2(r^2 - s^2, 2rs);$$

mivel azonban

$$x_2 = r^2 - s^2 = 2r^2 - (r^2 + s^2) \equiv 2r^2 \pmod{D},$$

ezért mod D érvényesek a következő állítások:

$$x_3 = rx_2 - sy_2 \equiv 2r^3 - 2rs^2 = 2r(r^2 - s^2) = 2r\big(2r^2 - (r^2 + s^2)\big) \equiv 4r^3,$$

$$y_3 = sx_2 + ry_2 \equiv 2r^2 s + 2r^2 s = 4r^2 s,$$

$$x_4 = rx_3 - sy_3 \equiv 4r^4 - 4r^2 s^2 = 4r^2(r^2 - s^2) = 4r^2\big(2r^2 - (r^2 + s^2)\big) \equiv 8r^4,$$

$$y_4 = sx_3 + ry_3 \equiv 4r^3 s + 4r^3 s = 8r^3 s.$$

Megfogalmazhatjuk a következő sejtést:

(3) $$x_k \equiv 2^{k-1}r^k \quad \text{és} \quad y_k \equiv 2^{k-1}r^{k-1}s \pmod{D}.$$

Bizonyítsuk be teljes indukcióval. Az állítás $k=1$-re igaz. Tegyük fel, hogy $k(\geqq 1)$-ra igaz, akkor (T) alapján

$$x_{k+1} = rx_k - sy_k \equiv 2^{k-1}r^{k+1} - 2^{k-1}r^{k-1}s^2 = 2^{k-1}r^{k-1}(r^2-s^2) = 2^{k-1}r^{k-1}(2r^2-(r^2+s^2)) \equiv$$

$$\equiv 2^k r^{k+1} \pmod{D},$$

$$y_{k+1} = sx_k + ry_k \equiv 2^{k-1}r^k s + 2^{k-1}r^k s = 2^k r^k s \pmod{D}.$$

Tehát a (3) alatti összefüggések valóban általánosan érvényesek.

Ezek után a (2) állítást indirekt úton fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy

(4) $$D \mid y_k.$$

A (3) alatti második összefüggés értelmében

$$y_k = 2^{k-1}r^{k-1}s + mD, \quad \text{ahol} \quad m \in \mathbf{E}.$$

Ebből és a (4) alatti feltevésből következik, hogy

(5) $$D \mid 2^{k-1}r^{k-1}s.$$

Azt sejtjük, hogy $(D, r)=(D, s)=1$ igaz. Ez tényleg így van, mert ha a p prímszámra $p|r$ és $p|D$, akkor $p|s^2$, ebből $p|s$, ennélfogva $p|(r, s)=1$, ami ellentmondás. Ez a bizonyítás érvényes $(D, s)=1$-re is.

Most már (5)-ből $(D, r^{k-1}s)=1$ miatt következik

(6) $$D \mid 2^{k-1}.$$

Kimutatjuk, hogy $4 \nmid D$. Ugyanis

$$r^2 \equiv 0 \quad \text{vagy} \quad r^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

és

$$s^2 \equiv 0 \quad \text{vagy} \quad s^2 \equiv 1 \pmod 4.$$

Mivel azonban egyszerre nem lehet $r^2 \equiv 0$ és $s^2 \equiv 0$, ezért $r^2+s^2 \equiv 1$ vagy $r^2+s^2 \equiv 2 \pmod 4$

Ez viszont azt jelenti, hogy $4|D$ valóban nem lehetséges.

Ezek után — mivel $D=1$ lehetetlen — a (6)-ból $D=2$ következik, azaz érvényes $r^2+s^2=2$, amiből $r=s=1$-hez jutottunk. Ez az ellentmondás a feladat állításának helyességét bizonyítja.

Megjegyzés: A feladat megoldása megtalálható más módszerrel a következő műben: Skljarszkij—Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. Aritmetika és algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965., 239. *b)* feladat.

Megoldók száma: 5.

Megoldóknévsora (837—842.)

Ambrus András, Kiskőrös (838.); Bartha Gábor, Szentendre (837. két mód, 838., 839. két mód, 840—842.); Bogdán Zoltán, Cegléd (837—840.); Dudás Rozália, Szeged (841.); Filakovszky Péter, Érsekújvár (837—838., 840—842.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (837—841.); Kamarás Lajos, Pécs (837—842.); Kelemen Lajos, Kisvárda (841.); Kishalmi Rózsa, Szeged (838., 841.); Kotek Lászlóné, Tatabánya (838.); Kun Péter, Szentendre (839—842.); Kurcsics László, Csorna (841.); Likai László, Eger (837., 838., 841.); Papp László, Karcag (838., 839., 841.); Szánthó Gyula, Gyula (837—841.); Szigeti Béláné, Győr (842.); Szilágyi István, Esztergom (837., 838., 841.); Temesvári Ágota, Budapest (841.); Makora Tiberiu, Szatmár (837—839.); Tóth Ferenc, Szeged (838.); Varjú Lajos, Kecskemét (838.); Vermes Miklós, Budapest (837—841.); Viglas Tibor, Zseliz (837., 838.); Wekszli Árpád, Csorna (837., 841.).

3,50 Ft

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

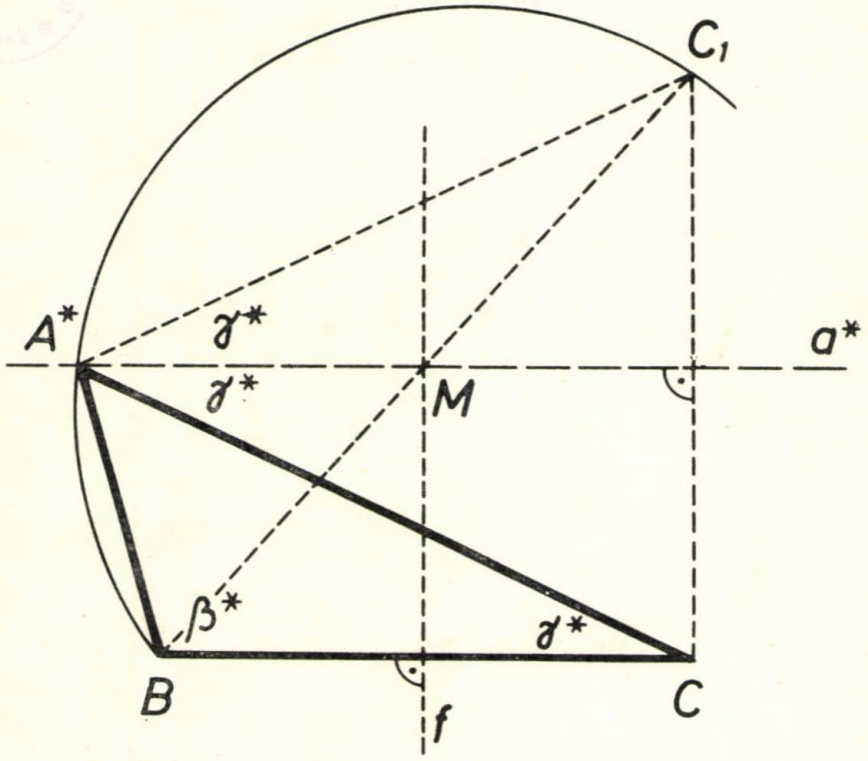
	Fűzve
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztály matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Matematika. Középiskolára előkészítő tanfolyamok anyaga (8059)	8,—
Előd Istvánné: Számoljunk együtt! 5—6. osztály (52 314)	10,—
Gádorné—Vári: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztályában (92 325)	20,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium I. osztályában a matematika tanításához (92 121)	20,—
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (92 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Szintezési útmutató a 10 121/I-II-III. sz. Matematikai feladatgyűjteményhez. Szerkesztő: Némethy Katalin (92 331)	10,—
Tatár István: Matematikai mozaik a matematikatagozatra előkészítő 5—6. osztályos szakkörök számára (19 009)	12,50
Radnai Gyuláné Szendrei Julianna: A játék matematikája (Általános iskolai szakköri füzet) (19 011)	8,—
Hámori Miklós: Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. Az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Obádovics—Szelezsán: Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (29 215)	12,—
Kovács Győző: Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet) (29 227)	11,—
Lukács Ottó: Koordinátageometria vektorokkal a síkban és a térben (Középiskolai szakköri füzet (29 219)	13,50
Jakab Albert—Pelle Béla—Perge Imre—Szepessy Bálint: Gyakorlati számolások (29 209)	10,50
Dr. Fodor János—Dr. Horváth Attila—Rábai Imre—Székely Jenő: Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára. I. kötet 8141/I.	22,—
II. kötet 8141/II.	28,50

Beszerezhetők a
17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.)
44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1977. április * XXIV. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 228-238.
77-596 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI, Budapest V., József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 14 Ft. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy a közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek. A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Pálfy Sándor: A kis Matematikus Baráti Körök 5. országos versenye (Folytatás) . 33

Dr. Urbán János: Néhány gondolat a függvények középiskolai tanításáról 38

Szikszai József: Hozzászólás a Matematika Tanítása egy cikkéhez 41

Dr. Rédling Elemér: A hasonlóság fogalmának kialakításáról 43

A szerkesztő postájából 54

FELADATOK 55

Könyvismertetés

СОДЕРЖАНИЕ

Шандор Пальфи: Пятое общегосударственное соревнование товарищеских кружков юных математиков (продолжение) 33

Д-р. Янош Урбан: Несколько мыслей об обучении функций в средней школе ... 38

Ёжеф Сиксаи: Высказывание по статье «Обучение математика» 41

Д-р. Элемер Редлинг: О разработке концептов подобия 43

Из почты редактора 54

ЗАДАЧИ 55

Новые книги

INHALT

Pálfy, Sándor: 5. Nationaler Wettbewerb der Zirkel Junger Mathematiker (Schlußteil) 33

Dr. Urbán, János: Einige Gedanken über den Unterricht der Funktionen in der Mittelschule 38

Szikszai, József: Bemerkung zu einem Aufsatz dieser Zeitschrift 41

Dr. Rédling, Elemér: Über die Gestaltung der Begriffe der Ähnlichkeit 43

Aus der Korrespondenz des Redakteurs .. 54

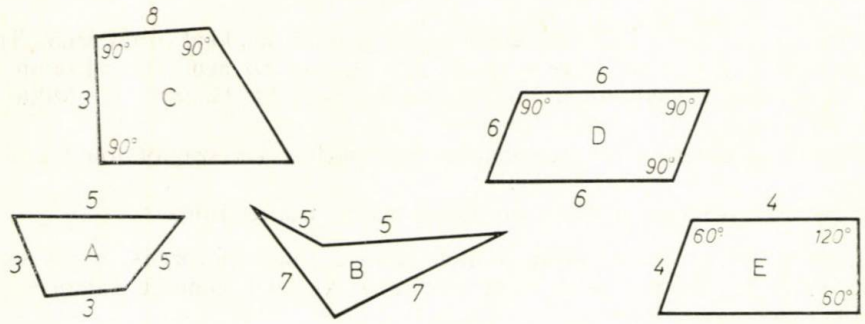
AUFGABEN 55

Buchbesprechung

PÁLFY SÁNDOR
főiskolai docens

A Kis Matematikus Baráti Körök (KMBK) 5. országos versenye II.

II. 1. Torz ábrákat rajzoltunk, azokhoz jó adatokat írtunk (az adatok cm-t jelentenek). Az adatok alapján a négyszögek betűjelét írd a táblázat megfelelő sorába!



Téglalap:	C	D				
Deltoid:	A	B	D	E		

Megoldás (83%): Lásd a táblázatba írt betűket.

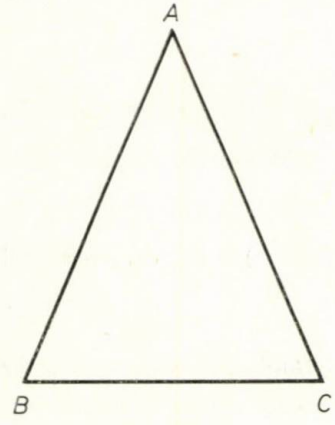
2. Ugyanaz volt, mint az 5. osztály **II. 3.** feladata. A hatodikos tanulók teljesítménye 73%.

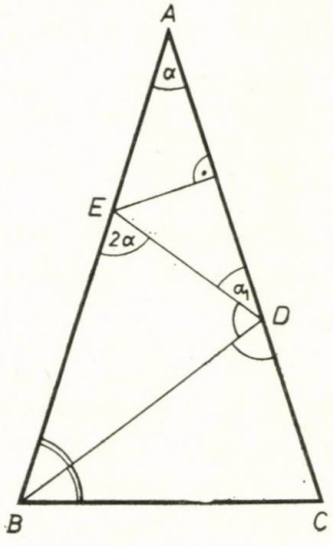
3. A felrajzolt ABC háromszög egyenlő szárú.

a) Szerkeszd meg a B szög felező egyenesét, és D-vel jelöld meg azt a pontot, ahol ez az AC szárat metszi.

b) Szerkeszd meg az AD szakasz felező merőlegesét, és jelöld E-vel ennek az AB-vel közös pontját!

c) Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha a BD szakasz felezi az EDC szöget?





Megoldás (56%): Az $AED\triangle$ egyenlő szárú, ezért az alapján fekvő két szöge egyenlő: $\alpha=\alpha_1$;

A $BDE\triangle$-ben az E szög$=2\alpha$, mert az $AED\triangle$-nek az E-nél fekvő külső szöge.

$BDE\triangle\cong BCD\triangle$, mert egy oldaluk (BD) és a szögeik egyenlők, ezért az $ABC\triangle$ alapján fekvő egy-egy szög: 2α.

A háromszög szögeinek összege: $5\alpha=180°$, amelyből $\alpha=36°$. A három szög: 72°, 72° és 36°.

4. Gábor és Tamás, a KMBK lelkes tagjai kitalálós játékkal szórakoztak: Tamás egy papírlapra felírta két szám összegét: 324. (Gábor ezt nem látta.) Ezután megszorozta az összeg egyik tagját 3-mal, a másikat 5-tel. Ezt Gáborral is közölte, és a két szorzat összegét is elárulta: 1250.

Gábor ezek ismeretében megmondta, hogy melyik két számot írta fel először Tamás.

Hogyan okoskodott Gábor és melyik két számot írta fel Tamás?

Megoldás (60%): Ha mindkét gondolt számot 3-mal szorozzuk, a két szorzat összege 972. Ez 278-cal kisebb, mint 1250, mert az egyik gondolt számot az 5-nél 2-vel kisebb számmal szoroztuk.

Az egyik gondolt szám: $278:2=139$, a másik: $324-139=185$.

7. osztály

I. 1. Az 5. osztályos **I. 1.** feladat volt. A hetedikesek teljesítménye 80%.

2. A Kis Matematikus Baráti Körök országos versenyének megyei fordulóján a Baráti Körök tagjainak 8,5%-a írt dolgozatot. Az országos döntőre a megyei forduló résztvevőinek 0,12 részét hívták be. Az utóbbiak száma a három különböző számjeggyel felírható legkisebb háromjegyű szám.

Mennyien vettek részt a tanévben a Kis Matematikus Baráti Körök foglalkozásain?

Megoldás (98%): A háromjegyű szám: 102. A megyei fordulón részt vevők száma: $102:0{,}12=850$. A KMBK foglalkozásain részt vevők száma: $850:0{,}085\approx 10$ ezer.

3. Egy általános iskolában a tanulók létszáma 418. A fiúk és a leányok számának aránya: 10:9. A felső tagozatos fiúk nélkül a fiúk és a leányok számának aránya 5:11-re változik.

Mennyi az iskolában a felső tagozatos fiúk száma?

Megoldás (90%): Az iskolába — a 10:9 arány szerint — 220 fiú és 198 leány jár. Az alsó tagozatos fiúk száma: $198\cdot\frac{5}{11}=90$. A felső tagozatos fiúk száma: $220-90=130$.

4. Jelöld meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz (i) és melyik hamis (h)!

Van olyan hegyesszög, amelynek váltószöge tompaszög. (h)

Két csúcsszög összege lehet egyenesszög. (i)

Minden olyan négyszög, amelynek átellenes oldalai egyenlők, paralelogramma. (i)

Van olyan paralelogramma, amelynek szemben fekvő szögei nem váltószögek. (h)

Azok a sokszögek, amelyeknek oldalai páronként párhuzamosak, paralelogrammák. (*h*)

Azok a négyszögek, amelyek átlói egymásra merőlegesek, rombuszok. (*h*)

A négyzet rendelkezik a rombusz, a téglalap, a paralelogramma és a deltoid minden tulajdonságával. (*i*)

Nem igaz, hogy a háromszög szögeinek összege 180°. (*h*)

Nem igaz, hogy a háromszög szögeinek összege 180°-nál kevesebb. (*i*)

Megoldás (82%). (A válaszokat az állítások után beírtuk.)

5. A koordináta-rendszerben két gyalogos menetideje és megtett útja közötti összefüggést ábrázoltuk: az I-gyel jelölt gyalogosét folytonos vonallal, a II-vel jelölt gyalogosét szaggatott vonallal.

Olvasd le a grafikonról az *a)—i)* kérdésekre a válaszokat!

a) Mikor indult az I. gyalogos?

b) Mikor indult a II. gyalogos?

c) Mekkora a két gyalogos kezdeti sebessége?

d) Találkoztak-e útközben a gyalogosok? Ha igen, mekkora távolságban az indulás helyétől?

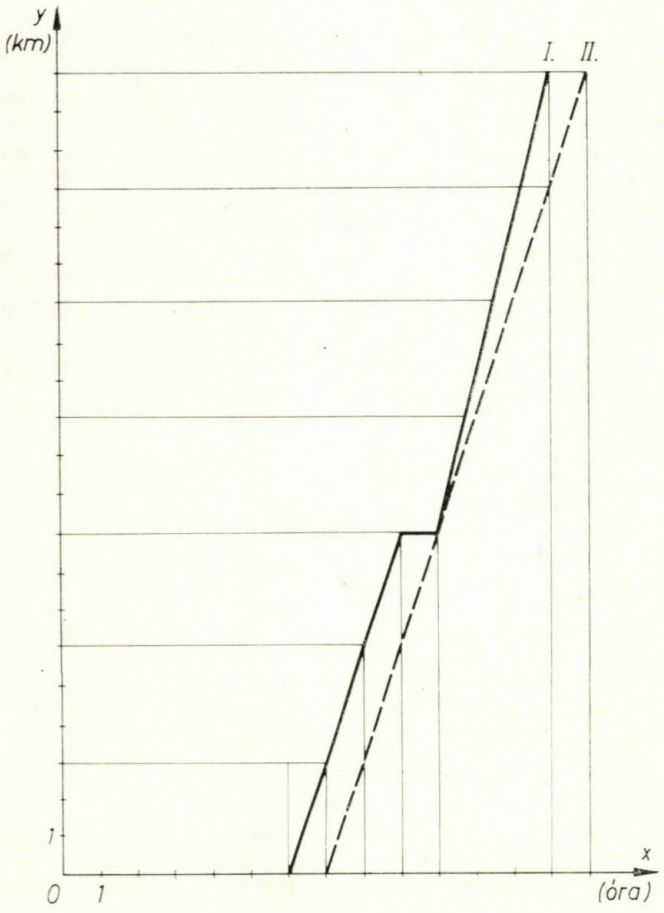
e) A találkozás után melyik gyalogosnak lett nagyobb a sebessége?

f) Mekkorára nőtt ez a sebesség?

g) Melyik gyalogos ért előbb célba, a 21 km-es út végéhez?

h) Hány órával előzte meg az első a másodikat?

i) Hány órával előzte volna meg az I. gyalogos a II. gyalogost, ha sebessége a találkozás után 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra nőtt volna?



Megoldás (97%): *a)* 6 órakor. *b)* 7 órakor. *c)* $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$. *d)* Igen! 9 km-re. *e)* Az I. gyalogosnak. *f)* $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$. *g)* Az I. gyalogos. *h)* 1 órával. *i)* 2 órával.

II. 1. Írj fel egy háromjegyű számot egymás után kétszer úgy, hogy hatjegyű számot kapj. Akárhogyan választod meg a háromjegyű számot, a hatjegyű szám mindig osztható 7-tel, 11-gyel, 13-mal és a háromjegyű számmal.

Indokold meg, miért van ez így!

Megoldás (71%): A hatjegyű szám a háromjegyű számnak 1001-szerese. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. A hatjegyű szám ezért osztható a 7-tel, 11-gyel, a 13-mal és a háromjegyű számmal is (egyebekkel is).

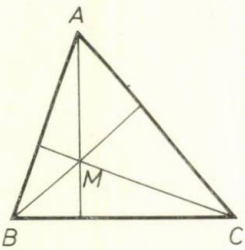
2. Három hordóban bor van. Ha az első hordóból annyit öntünk a másodikba és a harmadikba, mint amennyi már volt ezekben, azután a másodikból öntünk annyit az elsőbe és a harmadikba, mint amennyi ezekben éppen van, végül a harmadikból öntünk annyit az elsőbe és a másodikba, mint amennyi ezekben éppen van, akkor mindegyik hordóban pontosan 26 liter bor lesz.

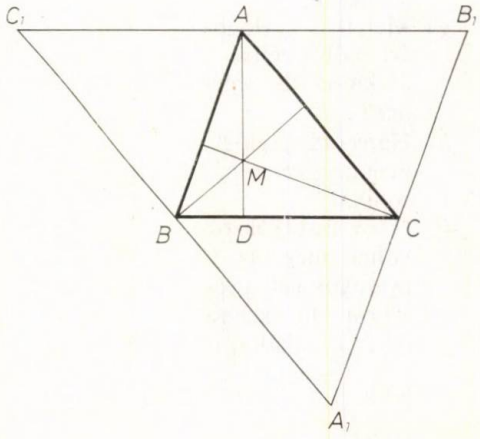
Hány liter bor volt mindegyik hordóban eredetileg?

Megoldás (91%): Visszafelé pörgetve az öntögetéseket:

	1. hordóban van:	2. hordóban van:	3. hordóban van:
3. öntögetés után	26 liter	26 liter	26 liter;
2. öntögetés után	13 liter	13 liter	52 liter;
1. öntögetés után	6,5 liter	45,5 liter	26 liter;
Öntögetés előtt	42,25 liter	22,75 liter	13 liter.

3. Egészítsd ki az ABC háromszöget olyan háromszöggé (három háromszög hozzárajzolásával), amelynek az ABC háromszög magasságvonalai az oldalfelező merőlegesei!



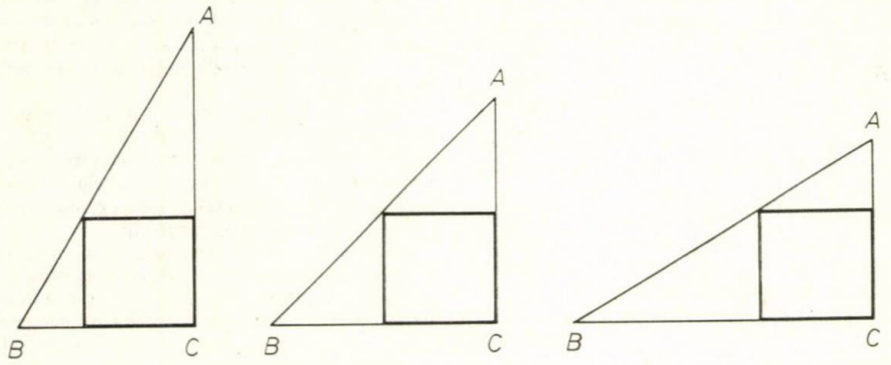


Megoldás (55%): Ha a háromszöget mindhárom oldalának felezőpontjára tükrözzük, az $A_1B_1C_1\triangle$ eleget tesz a feltételeknek. Ez bizonyítható. Az egyik oldalra pl. így: $C_1A = BC = AB_1$, mert C_1BCA paralelogramma és az $ABCB_1$

paralelogramma BC oldala közös. Mivel $AD \perp BC$, merőleges C_1B_1-re is, mert a paralelogramma két szemben fekvő oldaláról van szó.

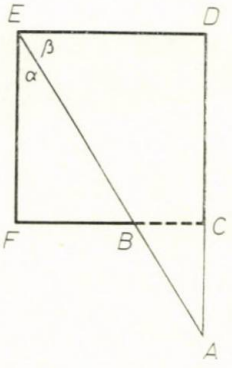
4. Három egybevágó négyzet köré derékszögű háromszöget rajzoltunk. A középső egyenlő szárú.

Bizonyítsd be, hogy ezen háromszögek közül az egyenlő szárúnak legkisebb a területe!



Megoldás (46%): A középső háromszög területe a négyzet területének kétszerese, mert a négyzethez csatlakozó két derékszögű háromszöget a négyzettel közös oldalán át 180°-kal a négyzetre forgatva, a két háromszög éppen parkettázza a négyzetet.

A másik két esetben is hasonlóan lefedi a két háromszög a négyzetet ($\alpha+\beta=90°$), de a nagyobbik háromszög egy része „kilóg", mert az egyik esetben AD, a másik esetben BF nagyobb, mint a négyzet oldala.

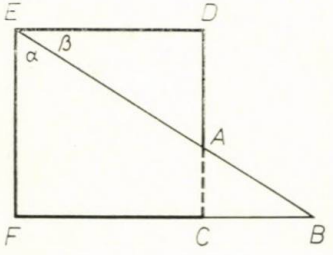


A tanulók munkájának értékelése

Külön tanulmányt érdemelne a tanulók munkájának elemzése. Erről most le kell mondani, mert a feladatok ismertetése — annak ellenére, hogy a megoldások részletes leírásától eltekintettünk — kimerítette a rendelkezésünkre álló terjedelem nagy részét. Ezért csak röviden foglaljuk össze az általánosítható tapasztalatokat.

Elégedettek lehetünk a versenyzők teljesítményével: csupán hat esetben nem érte el az 50%-ot, viszont tizenkét esetben meghaladta a 75%-ot.

Figyelembe kell venni azt, hogy zömmel nem „rutin feladatokat" kellett a tanulóknak megoldaniuk, hanem olyanokat, amelyek önálló gondolkodást, több esetben ötletet kívántak a versenyzőktől, és szokatlan helyzet elé állította őket. Ebben az 5. osztályosok nyújtották a leggyengébb és a 7. osztályosok a legjobb teljesítményt.



Ez valószínűleg abból is adódik, hogy az 5. osztályosok nagy része csak egy éve KMBK tag, a 7. osztályosok mögött viszont hároméves múlt van. Így a nagyobbak többet tanultak a KMBK foglalkozásokon és gondolkodásuk rugalmasabb.

Az is igaz, hogy az 5. osztályosok nehezebben értik meg a leírt szöveget, és kevésbé tudják értelmesen leírni a jó gondolataikat. A 6. és 7. osztályosoknál is a megoldások indokolásában, ennek leírásában mutatkozott a legnagyobb hiányosság.

Valahogy nem érzik a gyerekek, hogy miért kell valamit indokolni, mit kell bizonyítani, mit és mennyit kell ebből leírni. Különösen a geometriai szerkesztésekben és bizonyításokban mutatkoztak ezek a hiányosságok.

Általában nehezebben birkóztak meg a versenyzők a geometriai problémákkal. Nem igen tudják alkalmazni a tanultakat, és alig tudnak elszakadni a begyakorolt helyzetektől.

Nem geometriai feladatok esetében ez a hiányosság nem mutatkozott az előbb említett mértékben. Sok olyan feladat szerepelt a döntőn, amelyekhez hasonlókkal alig találkozhattak a versenyzők. Mégis boldogultak a megoldásukkal, a logikus gondolkodásuk segítette őket.

Néhány esetben ugyanazt a feladatot kapták a különböző osztályok tanulói. Természetesen csak olyanokat, amelyek megoldásához nem volt szükség egy-egy osztályra szabott tantervi anyag ismeretére. A tanulók fejlődését akartuk nyomon követni. A teljesítmények legtöbbször tükrözték a fejlődést, bár eltérés is adódott: pl. az 5. osztály **II. 3.** feladatát (kombinatorikai problémát tartalmazott) a kisebbek jobb eredménnyel oldották meg, mint a nagyobbak.

A hiányosságok közül a következőkre érdemes még rámutatni.

Alig akadt versenyző, aki egy-egy feladatot többféleképpen megoldott volna. Aki mégis vállalkozott másik megoldásra, az is csak abban adott „más megoldást", hogy más sorrendben írta le a műveleteket.

Azon is érdemes elgondolkodni, hogy — egy-egy feladatra vonatkoztatva — több versenyző 0 pontot kapott, annak ellenére, hogy a próbálkozást, vázlat készítését, a feladat megértését jelző megjegyzéseket stb. egy-egy ponttal „jutalmazta" a Versenybizottság.

A 0 pontos teljesítmények arra mutatnak, hogy a tanulók hamar eldöntik magukban, képesek-e a feladatot megoldani, és eleve lemondanak az erőfeszítésről, az útkeresés nehézségeiről. Talán azért, mert ezt nem igen szoktuk értékelni?

Mindent egybevetve, elismerést érdemelnek a versenyzők. Nemcsak a matematikában nyújtott teljesítményükért, érdeklődésükért, hanem a kulturált, fegyelmezett magatartásukért. Abban is példát mutattak, hogyan kell örülni mások sikerének, és hogyan kell elviselni a „kudarcot".

Érdemes volt életre hívni a KMBK versenyét, és a tanárok, a gyerekek bizonyára szívesen fogadják a következőt is, és valószínűleg már készülnek is arra a KMBK foglalkozásain.

A matematikatanítás MÓDSZERE

DR. URBÁN JÁNOS
főelőadó, OPI

Néhány gondolat a függvények középiskolai tanításáról

Lezajlott a gimnáziumi előzetes matematika-tanterv vitája, hamarosan várható a bírálatok alapján átdolgozott tantervtervezet jóváhagyása. A tervezetről beérkezett vélemények tömör összefoglalása az [1] cikkben olvasható. A függvények középiskolai tanításával és ezzel kapcsolatban a tantervtervezet egy részével foglalkozik a [2] cikk. Az ebben felvetett javaslatokhoz és bíráló megjegyzésekhez kapcsolódva szeretnék leírni néhány gondolatot, a függvények középiskolai oktatásával kapcsolatban.

Előzetesen — ha csak néhány sorban is — érdemes felidézni a matematika történetéből azt az utat, amely a mai modern matematikában elfogadott függvényfogalomhoz vezetett. Már az ókorban, a görög matematikában megtalálhatók az alapjai azoknak a gondolatoknak, amelyek a differenciál- és integrálszámítás kiindulópontját képezték. EUDOKSZOSZ és ARKHIMÉDÉSZ munkássága nyomán alakultak ki azok a módszerek, amelyek alkalmasak voltak infinitezimális meggondolásokat igénylő feladatok megoldására.

A függvényfogalom kialakulásának

döntő lépése a XVII. században DESCARTES nevéhez fűződik. Ő vezette be a „változó mennyiség" fogalmát, és az analitikus geometria megalkotásával a geometriai problémákat algebrai problémákra vezette vissza. Ebben az időben még csak a mai értelemben vett algebrai képlettel megadható függvényeket vizsgálták.

A XVII. és XVIII. század során a természettudományok, elsősorban a mechanika és a csillagászat fejlődése nagy hatást gyakorolt a matematikára is. A NEWTON, LEIBNIZ és követőik munkássága nyomán kidolgozott differenciál- és integrálszámítással olyan eszközök birtokába jutott a matematika, amelyek alkalmasak voltak arra, hogy segítségükkel a mechanikai mozgások törvényszerűségeit vizsgálják. A függvény fogalma ekkor a mozgás, a változás leírásának matematikai eszközeként jelenik meg. A fogalmat szabatos definíció nélkül használták — elsősorban képlettel, nem feltétlenül algebrai képlettel definiálható függvényeket vizsgáltak.

A XIX. században, elsősorban CAUCHY, WEIERSTRASS, CANTOR, DEDEKIND munkássága nyomán sor került az analízis szabatos megalapozására. Ebben döntő szerepet játszott a halmazelmélet kialakulása is, hiszen halmazelméleti eszközökkel sikerült megalkotni a valós számok szabatos definícióját. A függvény fogalma is ebben az időben jutott túl a képlettel, formulával megadható függvény fogalmán. Extrém példaként már teljesen „önkényesen" megadott hozzárendelésekkel is definiáltak függvényeket.

Az absztrakt halmazelméletben már nemcsak számok, pontok, egyenesek lehettek egy halmaz elemei, hanem tetszőleges dolgok. A függvény fogalmának általánosítása az „absztrakt" halmazok körében is nagyon termékenynek bizonyult.

A XIX. század végén, a XX. század elején a matematika alapjaival foglalkozó kutatások kidolgozták a relációk elméletét, és tisztázták a függvény fogalmának alapvető szerepét a halmazelmélet, és ezzel együtt az egész matematika felépítésében. Kialakult az a megállapodás, hogy az egyértékű kétváltozós relációkat célszerű függvényeknek tekinteni.

A halmazelmélet axiomatikus felépítése során — e század húszas éveiben — megadták az általános függvényfogalom definícióját a halmazelmélet alapfogalmaival. Ez a definíció a függvényt olyan rendezett párokból álló halmazként értelmezi, amelyben két különböző elem első komponense is különböző. A „rendezett pár", az „első komponens" fogalmak az axiomatikus halmazelmélet alapfogalmaival definiálhatók.

A mai matematikai szakirodalomban két felfogás található. Az egyik a függvény fogalmát azonosítja az előző definícióval. A másik felfogás a függvényt alapfogalomként kezeli, a szokásos hozzárendeléses definícióval írja körül, és azt vallja, hogy az axiomatikus halmazelméletben definiált fogalom egy modellje a függvény fogalmának. (Például ez utóbbi felfogás szerint vezeti be a függvényt [3] és [4].)

Hogyan tanítsuk a függvény fogalmát a középiskolában? Erre a kérdésre egy lehetséges válasz az, hogy a függvénynek az axiomatikus halmazelméletben megadott szabatos definícióját tanítsuk. Ezt az utat követi, bár nem egészen következetesen az [5] tankönyv. Egy másik lehetséges felfogás szerint a függvény fogalmának tanítása során azt célszerű szem előtt tartani, hogy az egyes lépések kövessék a függvényfogalom történeti fejlődését ([6]).

Véleményem szerint a jelenlegi helyzetben nem célszerű a függvény fogalmát a középiskolában az axiomatikus halmazelméletben definiált modelljével bevezetni, még sok példával történő előkészítés után sem. A függvény fogalmával való első ismerkedést a hozzárendeléses, szemléletes fogalom alapján jó kezdeni, vagyis szigorúan véve alapfogalomként jó kezelni. Ezt az utat követi például

a [7] tankönyv is, és így vezetik be a függvény fogalmát az új középiskolai tantervtervezetek is. Ez a bevezetési mód azonban nem zárja ki azt, hogy kellő halmazelméleti ismeretek és a függvényekkel kapcsolatos sok tapasztalat összegyűjtése után — például a negyedik osztályban a rendszerező ismétlés során —, a tanulók megalkossák a függvényfogalom halmazelméleti modelljét is.

A függvény fogalmának tanítása során — nem mechanikusan másolva — célszerű figyelembe venni a történeti fejlődést is. Ügyelni kell arra, hogy az érlelődő fogalomban a tanulók tapasztalatai nyomán azok a tények is felhalmazódjanak, amelyek a közvetlen valósághoz kapcsolják a fogalmat. Lássák például azt, hogy a függvény fogalmának milyen fontos szerepe van a mozgások, változások leírásában.

Fontos lépés az általános függvényfogalom kialakítása felé az is, hogy az új gimnáziumi tantervtervezet a geometriai transzformációkat is függvényként tárgyalja. Ugyanezt a célt szolgálja az egyenletek, egyenlőtlenségek logikai függvényként való tárgyalása is.

Kétségtelen tény, hogy a függvények jelölésével kapcsolatban nemcsak a hazai, hanem a nemzetközi irodalomban is sok a következetlenség. Egy egységes, következetes, modern jelölésrendszer bevezetése és általánossá tétele csak hosszabb átmeneti időszak után várható reálisan. E téren a következő évek egyetemi és főiskolai tankönyvei, jegyzetei és természetesen a középiskolai tankönyvek tehetnek fontos lépéseket.

Lényeges kérdés az is, hogyan tanítsuk a tananyag jelentős részét képező valós függvényeket. Valóban fontos, hogy a tanulók megismerkedjenek e függvények körében végzett műveletekkel: függvények összegével, számszorosával, szorzatával, reciprokával és függvények összetételével (kompozíciójával). Ezeket a fogalmakat be lehet vezetni definíciókkal, és meg lehet vizsgálni, milyen függvényosztályhoz jutunk néhány egyszerű kiindulási függvényből ezekkel a műveletekkel. A témakört ismerők számára így kétségkívül szép, elegáns rendszerezését lehet megadni például a racionális függvények osztályának. Ez a tárgyalási mód azonban a tanulók számára nem sokat mond, hiszen nem áll rendelkezésükre olyan tapasztalati anyag, amelynek birtokában látnák, hogy éppen így célszerű rendszerezni a racionális függvényeket.

A gimnáziumi tantervtervezet célja az, hogy egyes konkrét valós függvények tanulmányozásával sok tapasztalatot szerezzenek a tanulók. Ezt a célt szolgálja a lineáris függvények, a másodfokú függvények és más példák szerepeltetése. A sok-sok tapasztalat rendszerezésére, egyszerű, elegáns formába öntésére azután szintén sor kerülhet, például a rendszerező ismétléskor.

A tantervtervezet — véleményem szerint — kétségtelenül előrelépést jelent a függvényfogalom tanítása terén. Természetesen nem old meg minden problémát e téren, hiszen a realitásokból kellett kiindulnia. Nem építhetett például az általános iskolai új matematikatantervre. Egy jövőbeni, erre épülő tanterv bizonyára még többet fog majd adni ezen a területen is.

IRODALOM

[1] Lasztóczi Gyula: *Hogyan fogadta a pedagógus-közvélemény a gimnázium új, előzetes matematika-tantervét?* — A Matematika Tanítása, 1976/2.

[2] Kósa András: *A függvények tanítása a középiskolában* — ELTE TTK Szakmódszertani közleményei IX. 1976. Matematika.

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин: *Элементы теории функций и функционального анализа* — Наука, Москва, 1972.

[4] J. R. Shoenfield: *Mathematical logic* — Addison-Wesley, New York, 1967.

[5] W. Breidenbach: *Mathematik.* 9. Schuljahr — Westermann, Braunschweig, 1973.

[6] A. A. Sztoljár: A matematikatanítás logikai problémái — Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

[7] *Алгебра. Учебное пособие для 6-го класса средней школы* — Просвещение, Москва, 1975.

SZIKSZAI JÓZSEF
tanár, Miskolc

Hozzászólás a Matematika Tanítása egy cikkéhez

Az 1976. évi 3. és 4. számban olvasható Rábai Imre cikksorozata VAN-E MEGOLDÁS? HÁNY MEGOLDÁS VAN? címmel. A szerzővel lényegében egyetértek, és saját tapasztalataimat, gondolataimat összegyűjtve, a legfontosabbakat le is írom. Valóban sok nehézséggel találkozunk a tanórákon a címben fölvetett problémákkal kapcsolatosan, főleg az I. osztályban, és nem csak a geometriai számítási feladatoknál. A tanulók az eredmény felírása vagy a szerkesztés elvégzése után gyakran megfeledkeznek a feladat megoldásához nagyon is hozzá tartozó vizsgálatokról, vagy feleslegesnek tartják azt, a legjobb esetben szükséges rossznak, s elvétve olyan is akad, aki nehezen jut el annak megértéséig, hogy miről is van szó. Természetesen a bajokat a tanár is okozhatja, növelheti, ha saját maga is csak futólag intézi el az ún. diszkussziót, esetleg időhiány miatt. Az időzavar elkerülésére, a tanulók figyelmének felkeltésére gyakran építek be az óra anyagába olyan feladatokat is, amelyeknél a számítás vagy a szerkesztés egyszerű, rövid (lehetőleg minden tanuló számára azonnal érthető), és a főcél a diszkusszió.

A geometriai számítási feladatokkal kapcsolatos különleges nehézségekre a cikk 7. feladatának (100. oldal) elemzésével szeretnék rámutatni. Más típusú feladatoknál — pl. egyenletmegoldásnál — gyakran szoktuk hangoztatni, hogy ha számítási hibát nem követtünk el, és megoldás közben csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, az ellenőrzés csak formalitás. A 7. feladatnál azonban a c oldal kiszámításáig szó sincs ekvivalenciáról. Nézzük ugyanis a következő feladatot.

Van három egyenlő területű téglalap. Oldalpárjaik a, m_a; b, m_b; c, m_c. *Tudjuk még, hogy* $m_c = m_a + m_b$. *Mekkora* c, *ha* a *és* b *adott?* (1. számpélda: $a = 15$ cm, $b = 10$ cm; 2. számpélda: $a = 7$ cm, $b = 3$ cm.)

Nyilvánvaló, hogy ez a feladat éppen úgy az

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

törtes egyenletre vezet, mint a háromszöges 7. feladat. Ugyanakkor a téglalapos feladatnál bármely a és b távolsághoz tartozik megoldás, a 2. számpéldánál viszont $c = 2{,}1$ cm, és $3 + 2{,}1 < 7$, tehát a háromszöges feladatnak most nincs megoldása.

Számításainkban egyik feladatnál sem tévedtünk, tehát hol a hiba? Ott, hogy a 7. feladat szövegében szereplő összes követelményt nem írtuk fel előre és egyszerre összefüggések (képletek, egyenletek, egyenlőtlenségek) formájában, tehát így:
Az a, b, c távolságok háromszöget alkotnak:

$$c < a + b, \quad a < b + c, \quad b < c + a.$$

Háromszög magasságairól van szó:

$$2t = am_a = bm_b = cm_c.$$

A magasságokra vonatkozó követelmény:

$$m_c = m_a + m_b.$$

Numerikus adatok:

$$a = 15 \text{ cm}, \quad b = 10 \text{ cm}.$$

Más dolog, hogy a megoldás során az első feltételt utolsóként vesszük sorra, és ezt ellenőrzésnek nevezzük. Ezzel válik a „Van-e megoldás?" vizsgálata a megoldási folyamat egyenrangú részévé. Így a KELL-E ELLENŐRIZNI?, HOGYAN, MIKOR ELLENŐRIZZEM?, HOVÁ HELYETTESÍTSEM?, ELFELEJTETTEM ELLENŐRIZNI tanulói megnyilatkozások gyakorisága is csökken, és szükségtelen a — nem egy tanuló előtt eléggé homályos — „Tegyük fel, hogy van megoldás" bevezető mondat is.

Természetesen nem arról van szó, hogy hasonlóan kellene eljárni minden feladat megoldásánál, annál is inkább, mert a feladat által megszabott összes követelményt nem lehet mindig összefüggésekkel kifejezni. A feladattal nem érintettem minden feladattípust, azt is elismerem, hogy semmi újat nem mondtam, csak arra gondolok, hogy milyen módon is lehetne hangsúlyozni a tanulók előtt, hogy „ne módosítsák a feladat szövegét". A követelményeket pontosan be kell tartani. Ennek érdekében gondosan olvassák el a feladat szövegét, ha kell, többször is, és ne csak a megoldás megkezdése előtt. Csodaszer nincs, a megoldási receptek hasznosak, de csak akkor, ha nincs belőle sok. Nem minden tanuló tudja ezeket fejben tartani, még kevésbé a kellő időben és helyen alkalmazni, viszont elvehetik kedvét a matematikától.

Oldjuk meg a 7. feladatot általánosan, tehát ha az adott oldalak a és b! Mivel c a háromszög legkisebb oldala, és a másik két oldal jelölése választható úgy, hogy $a \geqq b$ legyen, a háromszög-egyenlőtlenségek közül elegendő az

$$a < b+c$$

követelmény. Helyettesítve a törtes egyenletből c-re adódó

$$c = \frac{ab}{a+b}$$

összefüggést, ekvivalens átalakítások után az

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 < 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az x^2-x-1 függvény zérushelyeit megkeresve, a feladat megoldását a következő módon írhatjuk fel:

$$c = \frac{ab}{a+b} \quad \text{és} \quad 1 \leqq \frac{a}{b} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \text{ahol } a \geqq b.$$

Megemlíthetjük azonban, hogy a két egyenlőtlenség a következővel pótolható:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < v < \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

ahol v az adott két oldal aránya ($a:b$ vagy $b:a$). Ha tehát az utóbbi egyenlőtlenség teljesül, a feladatnak van megoldása, egyébként nincs.

(Az általános megoldás nem feltétlenül tanórára való, feldolgozása inkább a szakkörön vagy felvételi előkészítőn célszerű. Az eredmény azonban a 7. feladat megoldásakor megemlíthető.)

Megfigyelhető még, hogy a 7. feladat készítője nem csak arra ügyelt a numerikus adatok megválasztásánál, hogy a feladatnak legyen megoldása, hanem arra is töre-

kedett, hogy az a és b mellett a c-re is egész számot kapjunk. Így vetődhet föl az a kérdés, hogy *mely pozitív egész (a, b) számpárokra lesz a*

$$c = \frac{ab}{a+b}$$

is egész?

A megoldás pl. a következő lehet. Jelölje d az a és b természetes számok legnagyobb közös osztóját, és legyen $a=dm$, $b=dn$! A fenti képletbe helyettesítve:

$$c = \frac{dmn}{m+n}.$$

Az $m, m+n$, valamint az $n, m+n$ nyilván relatív prímek, tehát d többszöröse $(m+n)$-nek, azaz $d=k(m+n)$. Ennélfogva c akkor, és csak akkor egész, ha a és b felírható

$$a = k(m+n)m, \quad b = k(m+n)n$$

alakban, ahol a k, m, n paraméterek tetszőleges természetes számok. (Itt már felesleges annak a kikötése, hogy m és n relatív prímek.) Az a és b számokat így választva

$$c = kmn.$$

Ezek után kitűzhetjük a következő feladatot:

Valamely háromszög oldalainak mérőszámai egész számok és a c oldal adott. Tudjuk továbbá, hogy a háromszögben $m_c=m_a+m_b$. *Hány ilyen háromszög van?*

DR. RÉDLING ELEMÉR
KKVMF, Székesfehérvár

A hasonlóság fogalmainak kialakításáról

A geometria tanításában fontos szerepet tölt be a hasonlóság középiskolai tárgykörének feldolgozása. A hasonlóság témaköre jelentős matematikai és didaktikai értékek hordozója. A tapasztalatok azonban azt mutatják, hogy ezek az értékek gyakran maradnak kiaknázatlanul. A tanulók ismeretanyagában sok a formálisan megtanult, s gyorsan elfelejtett elem. Véleményünk szerint a nehézségek jórészt abból fakadnak, hogy a tanítás során a hasonlóság fogalmainak kialakításához nem mindig teremtjük meg a kellő feltételeket.

Ismeretes, hogy az oktatásban az egyik *legnehezebb feladat a helyes fogalmak kialakítása.* Vonatkozik ez a hasonlósági transzformációval kapcsolatos fogalmakra is. A helyes fogalmak kialakításának feltételei közül most csak kettőt emelünk ki: egyrészt *a fogalmak megfelelő előkészítését*, másrészt *a tanulók aktív részvételét a fogalom kialakításának folyamatában.* A hasonlóság oktatása kapcsán ezt a két feltételt pl. oly módon biztosíthatjuk, hogy megfelelő *előkészítő szakaszt* tervezünk a hasonlóság tárgyköréhez. Közleményünkben arra törekszünk, hogy néhány ötletet javasoljunk egy ilyen előkészítő szakasz megtervezéséhez.

A Matematika Tanítása XXII. évfolyamának 1. számában *A párhuzamos szelők problémaköre* címmel közölt cikkünkben összevetettük egymással a hasonlóság felépítésének két lehetséges módját, s megállapítottuk, hogy a középpontos hasonlóság tárgyalásával indító

feldolgozást didaktikailag jobbnak tartjuk, mint a tankönyvi felépítést. Az ott mondottakat a következőkkel egészítjük ki: A középpontos hasonlóság tulajdonságaira építő feldolgozás mellőzi a párhuzamos szelők kérdéskörének eléggé időigényes tárgyalását, ily módon az előbb említett előkészítő szakaszhoz is *biztosítani lehet* a szükséges időmennyiséget.

Tágabb összefüggéseiben tekintve az iskolai tananyagot, nyilvánvalóvá válik, hogy a hasonlóság oktatását — közvetve — a tanítás korábbi szakaszaiban is előkészítjük. A *közvetett előkészítéshez* tartozik az egybevágósági transzformáció tárgyalása, hiszen az egybevágóság a hasonlóság speciális esete. Ennek során a tanulók jártasságot szereznek a tételek bizonyításában, a szerkesztési feladatok megoldásában stb. Eközben a szemléletre támaszkodó okoskodást fokozatosan felváltja a hipotetikus-deduktív gondolkodásmód. Az előkészítéshez tartozik a függvényfogalom kialakítása is, hiszen minden egyértelmű ponttranszformáció — így a hasonlósági transzformáció is — függvényt ad meg. A közvetett feldolgozás egyik fázisa a hasonlóság általános iskolai tananyagának feldolgozása. Az ott megismert nagyítás (kicsinyítés) fogalmára épül a középpontos hasonlóság fogalma is. Ennek kapcsán meg kell azonban jegyeznünk, hogy a hasonlóság középiskolai és általános iskolai koncepciója között a jelenleginél jobb összhang megteremtésére volna szükség. Az általános iskolában — a hagyományos tárgyalásmódnak megfelelően — a tananyag felépítése a síkidomok hasonlóságához kötődik, a ponttranszformáció gondolata pedig eléggé háttérbe szorul. A középiskolában viszont éppen a ponttranszformáció fogalma áll a tananyag tengelyében, ezt a fogalmat kellene tehát az általános iskolában is megfelelő módon előkészíteni. (A problémakör részletesebb elemzését [6]-ban találhatja meg az olvasó.) A két koncepció közötti megfelelő összhang hiánya is mutatja, hogy szükség van a hasonlóság középiskolai tananyagának közvetlen előkészítésére is.

A *közvetlen* előkészítés során tartalmi vonatkozásban — véleményünk szerint — a következő két célkitűzést kell megvalósítanunk: egyrészt bizonyos mérvű rendszerező ismétléssel *fel kell újítanunk* és *elmélyítenünk* az egybevágósággal kapcsolatos ismereteket, másrészt előkészítő jellegű feladatok megoldásával fokozatosan *ki kell érlelnünk a hasonlósági transzformáció fontosabb fogalmait*, és *tudatosítanunk kell* a tanulókban *a középpontos hasonlóság alapvető tulajdonságait.*

I. A *közvetlen* előkészítés fázisában az egybevágósággal kapcsolatos ismeretek áttekintésére azért van szükség, mert a tanulók az I. osztályban megismertek ugyan különböző egybevágósági transzformációkat — tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli elforgatás, eltolás —, de az egybevágósági transzformáció és az alakzatok egybevágósága is olyan fogalmak, amelyek kellő kiérlelésére az I. osztályban nincs lehetőség. A hasonlóság tanításában viszont építünk ezekre a fogalmakra. (Gondoljunk pl. az alakzatok hasonlóságának a tankönyvben található definíciójára: Két alakzat hasonló, ha az egyiket egybevágósági transzformációval átvihetjük a másikkal középpontosan hasonló alakzatba.)

Fontosnak tartjuk, hogy fejlődjön a tanulók transzformációs szemlélete, és kiérlelődjön bennük a geometriai transzformáció fogalma is. Ennek a fogalomnak a megértését az előző tanévben megismert transzformációk rendszerező áttekintése segítheti elő. A tanulók számára megvilágítható a következő gondolat: *geometriai transzformációt* kapunk, ha egy ponthalmaz minden pontjához (tárgypont) egyértelműen hozzárendelünk valamely ponthalmazból egy-egy pontot (képpont). A transzformáció jellemzéséhez hozzátartozik annak közlése, hogy a transzformációt *milyen*

ponthalmazon (tárgypontok összessége) értelmezzük, *mely halmazhoz* tartoznak a képpontok, s meg kell adnunk a *hozzárendelés szabályát* is. (Ennek megértése nélkülözhetetlen pl. a középpontos hasonlóság, illetve a hasonlósági transzformáció fogalmának megismeréséhez.) A tanult síkbeli egybevágóságok mindegyikében a *pontsík egészének önmagára* történő leképzéséről van szó. (A merőleges vetítés során a ponttér egészét egy síkra, a képsíkra képezzük le. A síkra vonatkozó tükrözés esetén pedig a ponttér egészét képezzük le önmagára.) A különböző transzformációkhoz más-más *hozzárendelési utasítás* tartozik.

Minden egybevágósági transzformáció egy-egy értelmű leképzés. (A merőleges vetítés a tér pontjaihoz egyértelműen — de nem kölcsönösen egyértelműen — hozzárendeli a képsík pontjait.) Ily módon a tanult geometriai transzformációk mindegyike *függvényt* ad meg. A geometriai transzformációk tárgyalása során a függvény fogalma új megvilágítást kap, s eljuthatunk a már előzőleg kialakult függvényfogalom általánosításához. A geometriai transzformáció jellemzéséről mondottak összhangban vannak azzal, hogy egy függvényt akkor tekintünk ismertnek, ha adott az értelmezési tartomány és az a halmaz, amelyből az értelmezési tartomány elemeihez rendelt elemeket vesszük, továbbá a hozzárendelési utasítás. (Megjegyezzük, hogy a függvény értékkészlete ezekből már meghatározható.)

Az ismétlés során megalkothatjuk az előző tanév anyagának új *szintézisét*, s ez a szintézis lehetőséget nyújt arra, hogy a tanulók gondolkodásmódját *magasabb szintre* emeljük.

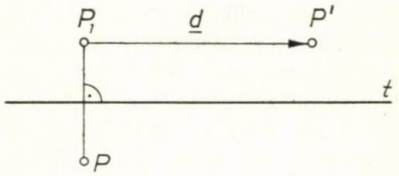
Az ilyen jellegű rendszerező ismétlés felvetheti azt a kérdést, hogy vajon az előző tanévben megismert különböző típusú síkbeli egybevágóságokon túlmenően van-e még más egybevágósági transzformáció is?

Könnyű áttekinteni és osztályozni a síkbeli egybevágóságokat, mert három alapvető esetre vezethetjük vissza őket. Igaz ugyanis a következő tétel: *A sík bármely egybevágósága vagy eltolás, vagy pont körüli elforgatás, vagy csúsztatva tükrözés.* (Kivételt képez az azonos leképzés, mert ez eltolásnak is, és elforgatásnak is tekinthető. A tétel részletes tárgyalását pl. [4]-ben találhatja meg az olvasó. Bizonyítására csak tagozatos osztályban vagy szakkörökön célszerű kitérni.)

Az első két transzformáció az alakzatok körüljárását megtartja (ezek a sík mozgástranszformációi), a csúsztatva tükrözés a körüljárás irányát megváltoztatja.

Az előbbi kérdésünkre tehát azt válaszolhatjuk, hogy az I. osztály tananyagában *nem* szerepel minden síkbeli (és térbeli) egybevágóság. A síkbeli egybevágóságok közül azonban csupán a csúsztatva tükrözést nem tanítjuk.

A csúsztatva tükrözés definíciója: *A sík pontjait tükrözzük egy adott t egyenesre, majd a t-vel párhuzamosan d távolsággal eltoljuk őket* (1. ábra). (A *t* a sík egyenese. Könnyen belátható, hogy a tükrözés és az eltolás sorrendje felcserélhető.)



1. ábra

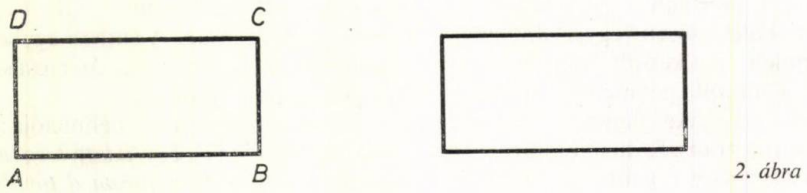
A tengelyes tükrözést, mint a csúsztatva tükrözés speciális esetét, már ismerik a tanulók. (Megjegyezzük viszont, hogy az eltolás nem tekinthető a csúsztatva tükrözés speciális esetének.) A csúsztatva tükrözés is — a már tanult síkbeli egybevágóságokhoz hasonlóan — a pontsíkot önmagára leképző transzformáció.

A tankönyv a hasonlósági transzformációt két transzformáció (az egybevágóság és a középpontos hasonlóság) *szorzataként* (egymásutánjaként) defini-

álja. A transzformációk szorzatának fogalmára szükség van az alakzatok hasonlóságának megértéséhez is. Ez a fogalom azonban csak az „olvasmányokban" szerepelt az előző tanévben, így nem biztos, hogy a tanulók kellőképpen ismerik. Az ismétlések során ez a fogalom is kialakítható. (A csúsztatva tükrözés is két transzformáció — a tengelyes tükrözés és az eltolás — szorzatának tekinthető).

Az egybevágósági transzformáció és az alakzatok egybevágósága olyan fogalmak, amelyek egymással szoros párhuzamban szerepeltek az előző tanévben. Ily módon — tapasztalataink szerint — ez a két fogalom gyakran összemosódik a tanulók tudatában. Meg kell tehát mutatnunk a tanulóknak, hogy ez a két fogalom *különbözik* egymástól. Ennek megvilágítása pl. oly módon történhet, hogy megmutatjuk a következőt: *két alakzat többféleképpen is egybevágó lehet egymással*, vagyis az alakzatok egybevágóságának definíciója értelmében *több olyan egybevágósági transzformáció is létezhet, amely az egyik alakzathoz ugyanazt a másik alakzatot rendeli hozzá.*

Így pl. tekintsük a 2. ábrán levő két téglalapot. A téglalapoknak közös a síkja, két-két szomszédos oldaluk egyenlő, s az alsó oldalak egy egyenesen vannak. Vegyük a téglalapok síkjának önmagára történő egybevágósági transzformációit,



2. ábra

s keressünk ezek közül olyanokat, amelyek az egyik téglalaphoz a másikat rendelik. (Az ábrán a jobb oldali téglalap csúcsait még nem betűztük meg. Ezzel is hangsúlyozni kívánjuk a következőt: még nem határoztuk meg, hogy az egyik téglalap pontjaihoz milyen módon rendeljük hozzá a másik téglalap pontjait.) Csúcspont képe csak csúcs lehet. Az A csúcshoz négy különböző csúcs is hozzárendelhető, s ha feltételezzük, hogy $AB \neq BC$, akkor mindegyik hozzárendelés a többi csúcs képét már egyértelműen meghatározza. *A csúcspontok és azok képének megadásával a síknak önmagára való távolságtartó leképzését is egyértelműen megadtuk.*

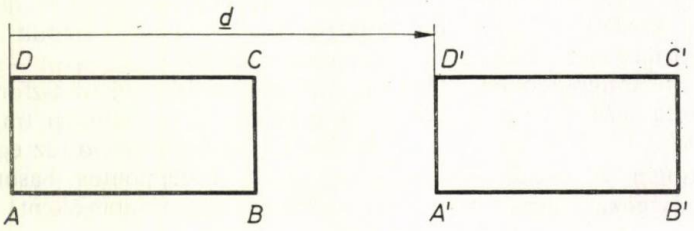
A különböző transzformációk esetén az A, B, C és D csúcsok képe legyen rendre A', B', C', D'. A négy lehetséges eset a következő:

1. *Eltolás* esetén a csúcsok megfeleltetését a 3. ábra mutatja:

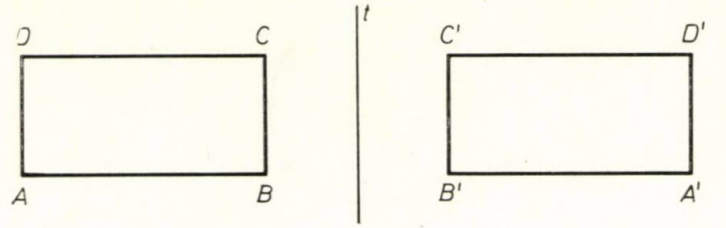
2. *Tengelyes tükrözéssel* a 4. ábrán látható megfeleltetést kapjuk.

3. *Középpontos tükrözéssel* (adott pont körüli 180°-os elforgatással) pedig az 5. ábrához jutunk.

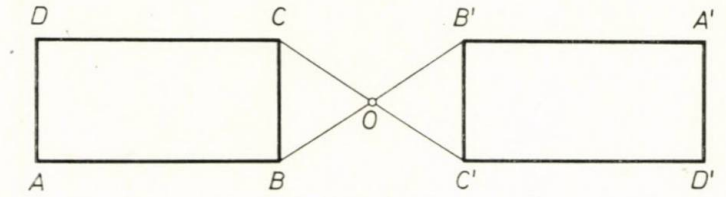
4. A 6. ábra szemlélteti a negyedik megfeleltetést.



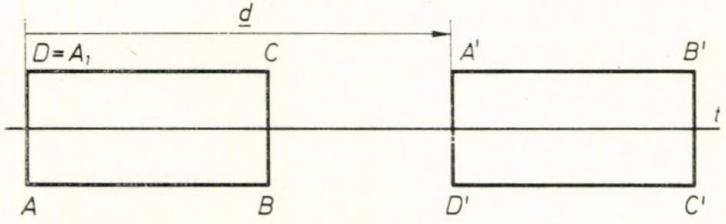
3. ábra



4. ábra



5. ábra



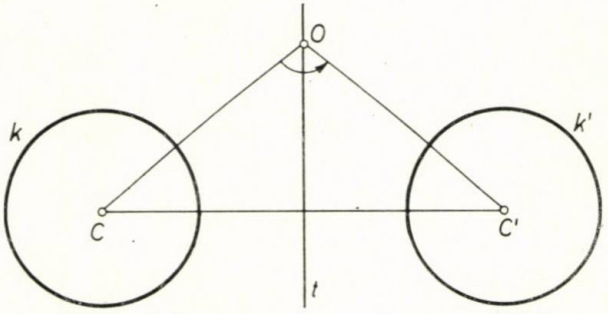
6. ábra

A pontokat a téglalapok középpontján áthaladó t tengelyre tükrözzük ($A \to A_1$), majd az $\overrightarrow{A_1A'}$ eltolást alkalmazzuk. Az $A \to A'$ hozzárendelés tehát *csúsztatva tükrözés*.

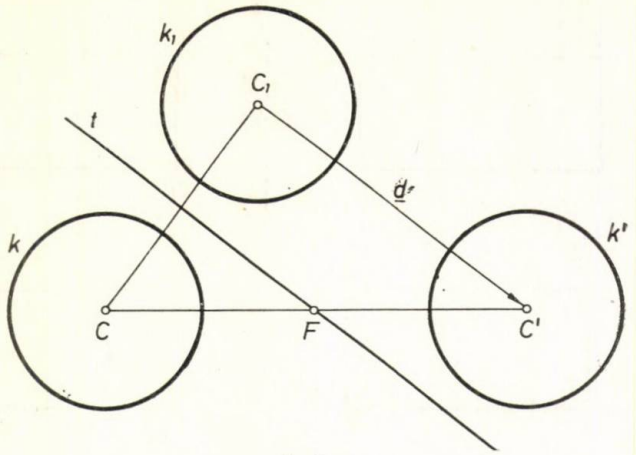
A tanítás során azt is ki kell emelni, hogy nem csupán a téglalap pontjait képeztük le, hanem mind a négy esetben a pontsík *egészének* leképzéséről van szó. A szerepeltetett téglalap ezen belül egy kitüntetett ponthalmaz (részhalmaz).

Megjegyezzük, hogy abban a speciális esetben, ha a téglalapok éppen négyzetek, akkor nyolcféleképpen rendelhető hozzá az egyikhez a másik (lásd [5], 54—56. oldal). Az egyik csúcsnak négy különböző csúcs feleltethető meg, s mindegyik hozzárendeléshez két különböző körüljárás tartozik.

Tekintsünk két egyenlő sugarú, egy síkban elhelyezkedő kört. A tanulók könnyen felismerhetik, hogy a két kör többféle módon is egybevágó. (Végtelen sok lehetőség: eltolás, a körök középpontját összekötő szakasz felező merőlegesének bármely pontja körüli elforgatás (7. ábra), illetve olyan csúsztatva tükrözés, amelynek tengelye a két kör centrálisának F felezőpontján áthaladó bármely egyenes lehet (8. ábra). (A részletes



7. ábra



8. ábra

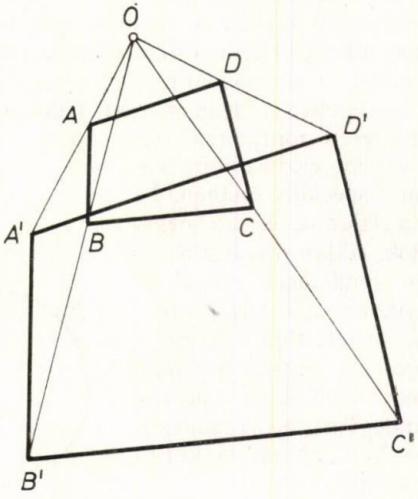
tárgyalást [8]-ban találhatjuk meg. Hasonló jellegű feladatokat könnyen megfogalmazhat az olvasó is.)

Megjegyezzük, hogy az egybevágóság rendszerező ismétlésének egy lehetséges módját [5]-ben találhatjuk meg. Ebben a feldolgozásban a tananyagot feladatcsoportok láncolatára bontottuk. Az egyes feladatcsoportokat a tanulók önállóan is megoldhatják, mert mindegyik feladatcsoport egymásra épülő példák sorából áll. Ily módon jól biztosítható a tanulók aktív részvétele a tananyag feldolgozásában.

A továbbiakban itt is bemutatunk néhány olyan feladatcsoportot, amelyeknek feldolgozásával a *középpontos hasonlóság fogalmának kialakításába, a definíció megfogalmazásába vonhatjuk be a tanulókat.* A feladatcsoportok tárgyalása során *a tanulók a középpontos hasonlóság alapvető tulajdonságait is maguk vehetik észre.* Ily módon nem passzív befogadói, hanem aktív „felfedezői" a tananyagnak, s ezáltal a tanítás hatékonysága jelentős mértékben megnövekedhet. (Az olvasó számára megemlítjük, hogy az [5]-ben más témakörhöz is találhatunk hasonló feladatcsoportokat.)

II. A tankönyvben a középpontos hasonlóság témakörének első lépcsőfoka a „Kétszeres nagyítás, feles kicsinyítés". A gimnáziumokra vonatkozó tananyagcsökkentéssel kapcsolatos utasítás ezt „tájékoztató anyagként" tünteti fel, tehát „tárgyalását vagy mellőzését a szaktanár dönti el".

Véleményünk szerint a nagyítás (kicsinyítés) áttekintésére mindenképpen szükség van, hiszen az itt szerzett tapasztalatokra is támaszkodnunk kell a középpontos hasonlóság tárgyalásában. A kérdéskört pl. egymásra épülő feladatcsoportok fonalán haladva is feldolgozhatjuk. Erre mutatunk most példát. A tanulóknak egyéni munkára kitűzhetjük pl. a következő feladatcsoportot:



9. ábra

1. *a)* Adott egy $ABCD$ négyszög és egy O pont. Nagyítsd ki az O pontból kétszeresére a négyszöget! (Használd a tankönyv 68. ábrájának betűzését.)

b) Az előbbi nagyítással ponthoz pontot rendeltünk. Keresd meg az A, a B és még néhány tetszőlegesen felvett pont megfelelőjét (képét)!

c) Próbáld megfogalmazni a megfelelő pontok közötti hozzárendelés szabályát!

d) Igaz-e, hogy az AD és $A'D'$ oldalak párhuzamosak?

A *d)* kérdésre a szemlélet alapján kérjük a választ. A *c)* kérdésre a következő válasz adható: egy tetszőleges, O-tól különböző P ponthoz hozzárendeljük az OP félegyenesnek azt a P' pontját, amelyre

$$OP' = 2 \cdot OP.$$

Az egyéni munkát követően *közösen* is megbeszéljük a feladatot. (Ez vonatkozik a további feladatokra is. Szükség esetén munka közben is segíthetjük a lemaradókat. Feltehető, hogy a tanulók nem adnak még precíz választ a *c)* kérdésre. Éppen ezért *további analóg feladatokat* is feladhatunk nekik. A megbeszélések során javítjuk a tanulók válaszait. Várható, hogy a feladatok feldolgozásában mind nagyobb önállósággal vesznek részt a tanulók, s a feltett kérdésekre is fokozatosan mind pontosabb választ adnak.)

Az előbbivel analóg feladatcsoportok a következők (**2**—**4.**): (Mindegyik feladatcsoport tartalmaz olyan elemet, amely már előzőleg is szerepelt, de magába foglal új kérdést is.)

2. *a)* Nagyítsd háromszorosára az O pontból az $ABCD$ négyszöget! (A betűzést az előbbihez hasonlóan készítsd el!)

b) A nagyítással ponthoz pontot rendelünk. Keresd meg néhány pont képét!

c) Keresd meg néhány képpont eredetijét („ősét")!

d) Fogalmazd meg a hozzárendelés szabályát!

e) Rajzold meg a négyszögek átlóit is! Milyen az AC és $A'C'$ átlók kölcsönös helyzete? (Párhuzamosak.)

f) Mit mondhatunk az egymásnak megfelelő szakaszok kölcsönös helyzetéről?

3. *a)* Kicsinyítsd felére az O pontból az $ABCD$ négyszöget! (Betűzz az előbbiekhez hasonló módon.)

b) A kicsinyítéssel ponthoz pontot rendelünk. Fogalmazd meg a hozzárendelési utasítást!

c) Keresd meg ennek az utasításnak megfelelően a sík néhány pontjának képét!

d) Keresd meg néhány olyan pont képét, amely nem illeszkedik a rajz síkjára!

e) Keresd meg néhány képpont eredetijét!

f) Mit mondhatunk a két négyszög szögeiről?

Az *f)* kérdésre a válasz: a megfelelő szögek egyenlők, hiszen ezek egyállású szögek. (A szemlélet alapján elfogadjuk, hogy az egyenes — ha nem megy át a középponton — párhuzamos a képegyenessel.)

Nem csupán a tanulók válaszai, hanem a tanári kérdések is mind precízebbek lehetnek már. A következő feladat szinte elérhető közelségbe hozza a középpontos hasonlóság definícióját.

4. Tekintsd a következő hozzárendelést! Adott egy O pont. Bármely P ponthoz (amely O-tól különbözik), hozzárendeljük az OP félegyenesnek azt a P' pontját, amelyre

$$OP' = 2{,}5 \cdot OP.$$

a) Végy fel az O ponton át egy síkot (füzeted lapja), s ezen a síkon néhány pontot! Szerkeszd meg a pontok képét!
b) Keresd meg néhány olyan pont képét, amely nem illeszkedik a felvett síkra!
c) Melyik pontot rendeltük az O ponthoz?
d) Melyik pontot célszerű az O ponthoz hozzárendelni?

Várható, hogy a bemutatott (vagy ezekhez hasonló) feladatok feldolgozását követően a tanulóknak nem okoz már nehézséget a középpontos hasonlóság fogalmának megértése, s önállóan is megfogalmazhatják a definíciót. Miután rögzítettük a definíciót, *ellenőrizhetjük* a fogalom megértését is. Ellenőrzésre való pl. a következő feladatcsoport. (Feldolgozásával a tanulók transzformációs szemléletét is fejlesztjük.)

5. Igazak-e a következő állítások?
a) A középpontos hasonlóság *a sík minden pontjához* hozzárendel egy pontot (a pont képét).
b) A középpontos hasonlóság *a tér minden pontjához* hozzárendel egy pontot.
c) Van olyan pont, amelyhez a középpontos hasonlóság két pontot is hozzárendel.
d) *Minden* pont képe valamelyik pontnak.
e) A középpontos hasonlóság *egy-egy értelmű leképzés.*
f) A középpontos hasonlóság *függvényt* ad meg.
g) Minden középpontos hasonlóság távolságtartó leképzés.

A *c)* és *g)* állítás nem igaz.

A középpontos hasonlóság alapvető tulajdonságait (lásd [2], 77. oldal) a párhuzamos szelőkkel kapcsolatos tételekre támaszkodva igazolni lehet. Jelenleg azonban ezeket a tulajdonságokat nem bizonyítjuk, hanem szemléletből fogadjuk el őket (axiómák). Ebben az esetben viszont ennek megfelelően kell őket *előkészítenünk* és tárgyalnunk. Nehézség elsősorban a következő tulajdonság elfogadtatása kapcsán jelentkezhet: A λ arányú középpontos hasonlóságban bármely szakasz képe az eredeti szakasz λ-szorosa.

Előkészítésként feldolgozhatjuk (egyénileg vagy közös munkával) a következő feladatot:

6. *a)* Tekintsd a (fentebb közölt) **1.** feladatban szereplő négyszögeket! Igazold, hogy

$$A'D' = 2 \cdot AD!$$

b) A **2.** feladatban szereplő négyszögeket tekintve igazold, hogy

$$A'D' = 3 \cdot AD!$$

Az *a)* állítást pl. a következő módon igazolhatjuk. (Az igazolás közös munka is lehet. A bizonyítás során építünk az előző tanévben megismert tételekre, s kihasználjuk, hogy a kétszeres nagyítás esetén az egyenes képe vele párhuzamos egyenes, illetve az O ponton áthaladó egyenes képe önmaga.)

A 10. ábrán

$$ED \| OA',$$

így

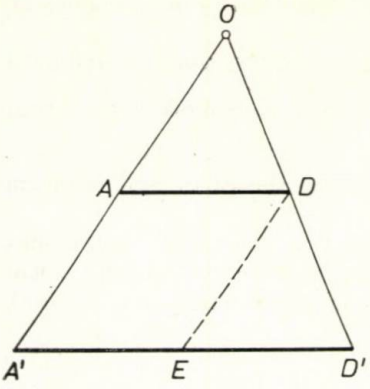
$$AD = A'E.$$

Mivel pedig

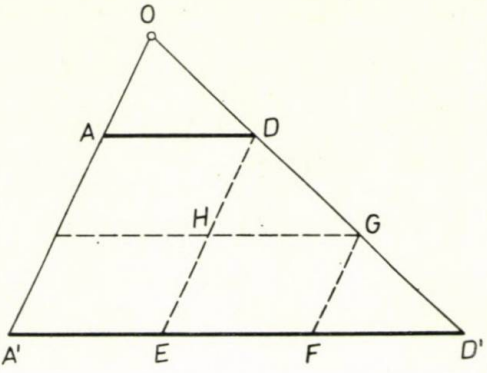
$$OD = DD',$$

ezért

$$AD = ED'.$$



10. ábra



11. ábra

Így valóban

$$A'D' = 2 \cdot AD.$$

Analóg módon tárgyalható a *b)* állítás is. Az igazolásban a 11. ábrára támaszkodhatunk. Az ábrán

$$OD = DG = GD',$$

továbbá

$$OA' \| DE \| GF,$$

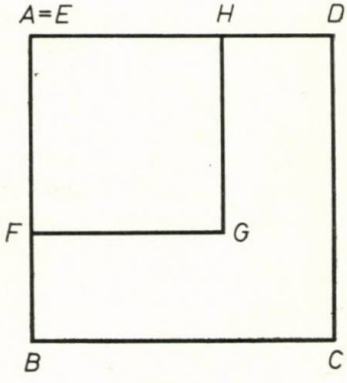
és

$$AD \| HG.$$

Az igazolást az olvasóra bízzuk. (Ezek után már tetszőleges $\lambda > 0$ számra *axiómaként* elfogadhatjuk, hogy a λ arányú középpontos hasonlóságban bármely szakasz képe az eredeti szakasz λ-szorosa.)

Analóg feladatcsoportokkal a hasonlóság témakörének más fontos fogalmait is előkészíthetjük. (Ilyen jellegű feladatcsoportokat pl. [5]-ben találhat az olvasó.) A fogalomkialakításnak ez a módja több időt igényel, mint a hagyományos eljárások. A bemutatott módszer azonban *lényegesen hatékonyabb* lehet, mint a szokásos tárgyalásmódok.

Mondanivalónkat a következőkkel egészítjük ki: a hasonlóság témakörének egyik fontos fogalma az alakzatok középpontos hasonlósága. A tankönyv 76. oldalán található ez a definíció: *Egy alakzatot és egy középpontos hasonlósággal hozzárendelt alakzatot középpontosan hasonlóknak mondunk*. Véleményünk szerint ez a definíció szűk, s így átfogalmazásra szorul. Gondoljunk pl. a következőkre. Vegyük fel a 12. ábrának megfelelően az $ABCD$ és az $EFGH$ négyszöget! (Az F csúcs az AB oldalon levő pont.) Ha a tankönyvi definíciót vesszük, akkor erről a két négyszögről *még nem mondhatjuk*, hogy középpontosan hasonlók — pedig *célszerű* őket annak tekinteni —, hiszen a két négyszöget nem rendeltük egymáshoz középpontos hasonlósággal.



12. ábra

Helyesebbnek tartjuk tehát a következő defi-

níciót: *Két alakzat középpontosan hasonló, ha létezik olyan középpontos hasonlóság, amely az egyikhez a másikat rendeli.*

Ennek értelmében az előbbi két négyszög is középpontosan hasonló, hiszen az A középpontú, $\lambda = \frac{AF}{AB}$ arányú középpontos hasonlóság a nagyobbik négyszöghöz a kisebbik négyszöget rendeli.

Ez a definíció *összehangban* van az alakzatok egybevágóságára és hasonlóságára adott tankönyvi definícióval is.

Ebben a definícióban azt is megfogalmaztuk, hogy az alakzatok középpontos hasonlósága olyan reláció, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív, tehát ekvivalenciareláció. Ez a tulajdonság a tankönyvben szereplő definícióban nem fogalmazódik meg.

IRODALOM

[1] *Matematika a gimnázium I. osztálya számára.* (Tankönyvkiadó, 1974.)
[2] *Matematika a gimnázium és szakközépiskolák II. osztálya számára.* (Tankönyvkiadó, 1974.)
[3] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába.* (Tankönyvkiadó, 1960.)
[4] HORVÁTH J.: *A sík és a tér egybevágósági transzformációi.* (ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, IV. (1971.), 48—70. oldal).
[5] PELLER J.—RÉDLING E.: *A tanulók tevékenységének tervezése és irányítása III.* (ELTE TTK kiadvány, 1973.)
[6] RÉDLING E.: *Megjegyzések a hasonlóság tanításához* (ELTE TTK Szakmódszertani közleményei, V. (1972), 170—178. oldal).
[7] RÉDLING E.: *A hasonlóság témakörének felépítéséről* (ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei VII. (1974.), 131—154. oldal).
[8] RÉDLING E.: *A hasonlósági transzformáció tulajdonságairól.* (ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, VII. (1974.), 155—175. oldal).

A SZERKESZTŐ POSTÁJÁBÓL...

JÓZSA SÁNDORNÉ
középiskolai tanár, Keszthely

Adalék a „Személyek a lépcsősoron" feladathoz

A szerző dolgozatában Varecza Árpádnak a Matematika Tanítása 1971. évi 3. és 1972. évi 1. számában megjelent dolgozataiban fölvetett probléma módosított változatának megoldásával foglalkozik. A következő eseteket tárgyalja:

1. A „hézagmentes" felállások száma, ha $n \leqq m$;
2. A „hézagmentes" felállások száma tetszőleges n, m esetben;
3. A felállások száma, ha üres lépcsők is megengedettek.

A probléma módosított változatával annak felvetője, Varecza Árpád is foglalkozik. A dolgozatban alkalmazott módszer lényegében nem különbözik lapunk 1975. évi 5. számában megjelent *Egy általánosítási probléma és a Bose—Einstein statisztika* című cikkében alkalmazott módszertől. Varecza ugyan a 2. és 3. kérdéssel konkrétan nem foglalkozik cikkében, de az alkalmazott módszerből a válasz ezekre egyszerűen adódik. Ezért Józsa Sándorné dolgozatát — bár az Varecza Árpád újabb cikke előtt 3 hónappal érkezett a szerkesztőségbe, és jónak tartjuk — nem közöljük.

NAGY FERENC
Hajdúböszörmény

Az elveszett levezetés

Fibonacci pisai matematikus 1225-ben megoldotta a következő feladatot:
„Keress olyan számot, amely egy egész, vagy egy törtszámnak négyzete, és az is marad, ha 5-öt elveszünk belőle, vagy 5-öt hozzáadunk."

A feladat úgy értendő, hogy *akár* csökkentjük 5-tel, *akár* növeljük, mindkét esetben racionális szám négyzetét kapjuk.

B. A. *Korgyenszkij* magyarul is megjelent könyvében ezt olvashatjuk a fenti problémáról (Matematikai fejtörők. Gondolat kiadó 1962. 342—345. oldal):
„Sajnos a krónika *nem jegyezte fel*, miféle megfontolások vezették rá a helyes eredményre (Fibonaccit), de a végeredményt megtalálta."

E könyv közöl a problémára egy *geometriai* módszerrel operáló megoldást, és azt írja a fejezet *végén*:
„A feladat algebrai megoldása még a legegyszerűbb esetben is negyedfokú egyenletrendszerre vezet."

Az alábbiakban ezt a *hiányzó* algebrai megoldást adjuk meg. Korgyenszkij könyve ezt *nem* közli.

Racionális számokban kell megoldani az

$$x^2+5 = y^2 \tag{1}$$

$$x^2-5 = z^2 \tag{2}$$

egyenletrendszert. A két egyenletből

$$z^2+10 = y^2.$$

Ha y és z racionálisak, akkor a különbségük is az. Jelöljük ezt a különbséget r-rel:

$$y = z+r. \tag{3}$$

Ezt az előző egyenletbe helyettesítve

$$10 = 2rz+r^2, \quad \text{és innen}$$

$$z = \frac{10-r^2}{2r}. \tag{4}$$

(3) és (4)-ből

$$y = \frac{10+r^2}{2r};$$

y-t (1)-be helyettesítve

$$x^2 = y^2-5 = \frac{100+r^4}{4r^2}.$$

Az utóbbi kifejezés jobb oldalán a nevező már teljes négyzet. Hogy a tört is teljes négyzet legyen, kell, hogy

$$100+r^4 = s^2$$

legyen, ahol s is racionális szám. Legyen

$$s = r^2+t,$$

ahol t is racionális szám. Akkor

$$100 = 2r^2t + t^2 \quad \text{és}$$

$$r^2 = \frac{10^2 - t^2}{2t}. \tag{5}$$

Itt a számláló egy „pitagoraszi" különbség, amely akkor négyzetszám, ha $t=6$, vagy ha $t=8$.
A két eset közül a nevező ($2t$) *csak* akkor négyzetszám, ha $t = 8$
Most már (5)-ből megkapjuk r értékét:

$$r = \frac{3}{2},$$

és (4)-ből

$$z = \frac{31}{12}.$$

Így y és x értéke a következő:

$$y = \frac{49}{12}, \quad x = \frac{41}{12}.$$

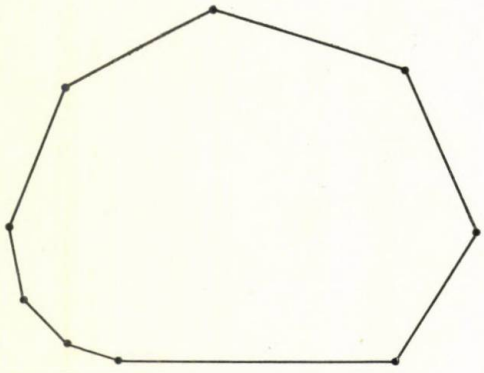
A szerkesztőség megjegyzése:

A fenti írás a szóban forgó problémának egy megoldását mutatja be. Javasoljuk olvasóinknak, hogy keressék a problémának más megoldását, esetleg a megoldások képletbe foglalt rendszerét, vagy az összes megoldást. A beküldött jó megoldásokat lapunkban közöljük.

KARVASZ JUDIT
a Steinmetz Miklós Gimn.
IV. osztályos tanulója

Egy feladatról...

A Matematikai Feladatgyűjtemény III. kötetében a **14.73.** feladat a következő: *Hány oldalú az a sokszög, amelyben a legkisebb szög* 120 *fok, és minden további szög* 5 *fokkal nő?*



A sokszögek szögösszegéről és a számtani sorozat összegéről tanultak alapján a következő egyenlet állítható fel:

$$(n-2)\cdot 180^\circ =$$

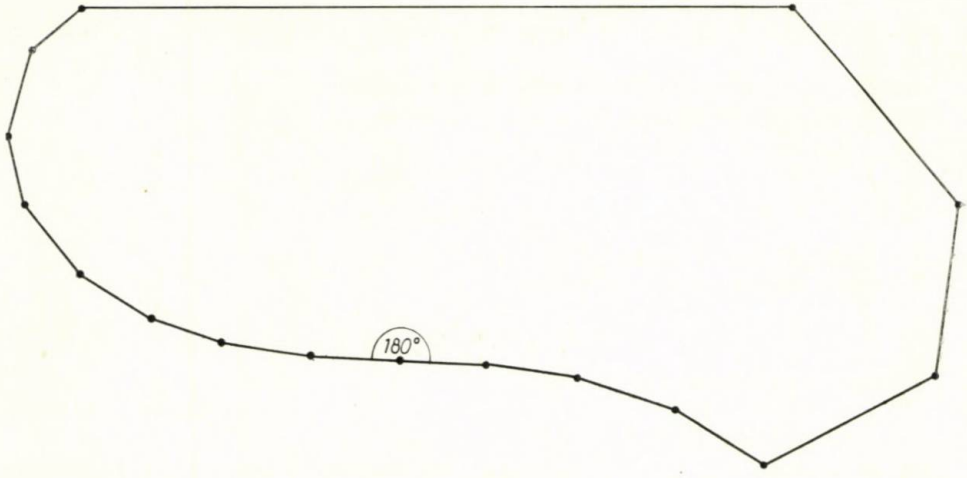
$$= \left(2\cdot 120^\circ + (n-1)\cdot 5^\circ\right)\cdot \frac{n}{2},$$

ahol n a sokszög oldalainak számát jelenti. Ebből a másodfokú egyenletből az $n=9$ és $n=16$ értékeket kapjuk. A megoldások között is ez a két érték szerepel, az ellenőrzésnél is mindegyik megfelel. Mégis!...

A tizenhat oldalú sokszög szögei között szerepel a 180 fok is. Ez tehát egy elfajuló tizenhatszög. És ezt megoldásnak fogadjuk el?

A szerkesztőség megjegyzése:

A levélírónak igaza van, az elfajuló tizenhatszög csakugyan nem megoldás.



FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv.

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74. IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is! Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő második számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

855. Oldjuk meg egész számokban az

$$x(x+y)\,(x+2y) = z^2$$

$$x(x+y)\,(x+2y)\,(x+3y) = z^3$$

egyenletrendszert!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

856. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$$

függvényhatárértéket!

Szalai Istvánné, Bicske

857. Oldjuk meg x-re a következő egyenletet!

$$2\cos x(16\cos^5 x - 16\cos^2 x \cdot \sin^3 x - 24\cos^3 x + 12\cos^2 x \cdot \sin x +$$

$$+ 12\sin^3 x + 9\cos x - 9\sin x) - 1 = \sqrt{2}\cos nx.$$

Filakovszky Péter, Érsekújvár

858. Valaki egy $P_n(x_n, y_n)$ (n pozitív egész szám) pontsorozatról a következőket árulja el:

a) a P_1 pont koordinátái relatív prím pozitív egészek;

b) a P_n pont koordinátáira, ha $n > 1$, teljesülnek:

$$x_n = kx_{n-1},$$

$$y_n = -ky_{n-1};$$

c) a k állandó pozitív egész szám;

d) minden pozitív egész n-re érvényes:

$$P_nP_{n+1} = 4k^n \cdot \sqrt{x_1 y_1}.$$

Van-e ilyen pontsorozat?

Bartha Gábor, Szentendre

859. Bizonyítsuk be, hogy a parabolaszelet területe $\frac{2}{3}$-része azon háromszög területének, amelyet a húr és a végpontjaihoz tartozó parabolaérintők zárnak közre!

860. Adott az ABC háromszög. Mi azon pontok halmaza a háromszög síkjában, amelyek a háromszög AB és AC oldalától egyenlő távolságra vannak?

Feladatmegoldások (843—848.)

843. Igazoljuk, hogy ha $a > 0$, és n nem negatív egész szám, akkor teljesül az

$$\frac{1}{a^n}\sum_{i=0}^{2n+1} a^i > 2n+1 \tag{1}$$

egyenlőtlenség!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: Alkalmazzuk az (1) egyenlőtlenség bal oldalára a disztributivitást, ezáltal az

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{a} + 1 + a + \ldots + a^{n-2} + a^{n-1} + a^n + a^{n+1}$$

összeghez jutunk. Minden tag pozitív, és majdnem mindnek a reciproka is szerepel a tagok közt. Felhasználva, hogy egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2, teljesülnek az

$$\frac{1}{a^i} + a^i \geqq 2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenlőtlenségek. Ha ennek az n egyenlőtlenségnek, továbbá az $a > 0$ miatt nyilvánvalóan igaz

$$1 + a^{n+1} > 1$$

egyenlőtlenségnek bal, illetve jobb oldalait összeadjuk, akkor éppen a bizonyítandó állítást kapjuk szigorú egyenlőtlenségjellel.

Almádi Jánosné, Budapest, Gajdács Ilona, Érd és Kelemen Lajos, Kisvárda

II. megoldás: Az (1) bal oldalából csökkentéssel próbálunk $(2n+1)$-hez eljutni. Az

$$\frac{1}{a^n}\sum_{i=0}^{2n+1} a^i > \frac{1}{a^n}\sum_{i=0}^{2n} a^i \tag{2}$$

egyenlőtlenség igaz, mert pozitív tagot hagytunk el az összegből. A (2) jobb oldalán álló összegre a számtani és mértani középre vonatkozó azonos egyenlőtlenséget alkalmazzuk, ennélfogva érvényes az

$$\frac{1}{a^n}\sum_{i=0}^{2n} a^i \geqq \frac{2n+1}{a^n}\cdot\sqrt[2n+1]{\prod_{i=0}^{2n} a^i} \tag{3}$$

egyenlőtlenség. De

$$\prod_{i=0}^{2n} a^i = a^{\sum_1^{2n} i} = a^{(2n+1)n},$$

ezért (3) jobb oldala egyenlő $(2n+1)$-gyel, és ezzel az (1) állítást igazoltuk.

Almási Béla, Ózd, Bencze Mihály, Kolozsvár
és Mészáros József, Galánta

Megoldók száma: 28.

844. Állítsuk elő zárt alakban a következő összeget!

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3i+1}{3^i}.$$

Róka Sándor, Tiszavasvári

I. megoldás: Az adott összeget bontsuk fel két összeg összegére a következő módon!

$$S_n = \sum_1^n \left(\frac{i}{3^{i-1}}+\frac{1}{3^i}\right) = \sum_1^n \frac{i}{3^{i-1}} + \sum_1^n \frac{1}{3^i} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}.$$

Az $S_n^{(2)}$-t könnyű felírni zárt alakban. Az $S_n^{(1)}$-et írjuk ki részletesen!

$$S_n^{(1)} = 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{n-1}{3^{n-2}}+\frac{n}{3^{n-1}}.$$

A törteket bontsuk fel 1 számlálójú törtek összegére így:

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} = 1 &+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots \quad +\frac{1}{3^{n-1}}+\\
&+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots \quad +\frac{1}{3^{n-1}}+\\
&+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots \quad +\frac{1}{3^{n-1}}+\\
&+\ldots\\
&+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-1}}+\\
&+\frac{1}{3^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Összegezzük az n sort egymás után!

$$S_n^{(1)} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}+\ldots+\frac{\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(\sum_1^n \frac{1}{3^{i-1}} - \frac{n}{3^n}\right).$$

Erre és $S_n^{(2)}$-re a véges mértani sor összegképletét alkalmazva a következő zárt alakot kapjuk:

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4 \cdot 3^n} - \frac{3n}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{11 \cdot 3^n - 6n - 11}{4 \cdot 3^n}.$$

Ezt az eredményt precízen teljes indukcióval igazolhatjuk.

Horváth Lajosné, Csurgó és Kishalmi Rózsa, Szeged

II. megoldás: Az adott összegnek vegyük a háromszorosát, és vonjuk ki belőle az adott összeget:

$$2 \cdot S_n = \sum_1^n \frac{3i+1}{3^{i-1}} - \sum_1^n \frac{3i+1}{3^i} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1 + 1}{3^0} + \frac{3 \cdot 2 + 1}{3^1} + \frac{3 \cdot 3 + 1}{3^2} + \frac{3 \cdot 4 + 1}{3^3} + \ldots + \frac{3n+1}{3^{n-1}} -$$

$$- \frac{3 \cdot 1 + 1}{3} - \frac{3 \cdot 2 + 1}{3^2} - \frac{3 \cdot 3 + 1}{3^3} - \frac{3 \cdot 4 + 1}{3^4} - \ldots - \frac{3n+1}{3^n} =$$

$$= 4 + \frac{3}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{3}{3^{n-1}} - \frac{3n+1}{3^n} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3^n - 3n - 1}{3^n} + \sum_0^{n-2} \frac{1}{3^i} = \frac{4 \cdot 3^n - 3n - 1}{3^n} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{11 \cdot 3^n - 6n - 11}{2 \cdot 3^n}.$$

Ebből S_n-re az I. megoldásban kapott zárt alak adódik.

Csorba Ferenc, Győr

III. megoldás: Az I. megoldásban vizsgált $S_n^{(1)}$ összeg tagjaiban egyszerűsítsünk 3-mal:

$$S_n^{(1)} = \sum_1^n \frac{3i}{3^i} = \sum_1^n \frac{i}{3^{i-1}} = \sum_1^n i \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}.$$

A legutóbbi alak a hatványfüggvény differenciálhányadosára vonatkozó tételt juttatja eszünkbe: $S_n^{(1)}$ nem más, mint az

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n x^i$$

polinomfüggvény deriváltja az $x = \frac{1}{3}$ helyen. $S_n(x)$ viszont könnyen előállítható zárt alakban:

$$S_n(x) = x \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

Határozzuk meg $S_n'(x)$-et, majd $S_n'\left(\frac{1}{3}\right)$-ot:

$$S_n'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

$$S_n'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9 \cdot 3^n - 6n - 9}{4 \cdot 3^n}.$$

Ezek után S_n zárt alakja:

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = \frac{9 \cdot 3^n - 6n - 9}{4 \cdot 3^n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{11 \cdot 3^n - 6n - 11}{4 \cdot 3^n}.$$

Bartha Gábor, Szentendre, Hoffer János, Budapest, Kacsó Ferenc, Marosvásárhely, Kamarás Lajos, Pécs és Óvári Lajos, Kecskemét

I. megjegyzés: Az S_n-re kapott zárt alakot pl. így is írhatjuk:

$$S_n = \frac{11}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n} - \frac{11}{4\cdot 3^n},$$

és ez — ismert tételekre támaszkodva — azt mutatja, hogy az S_n sorozat konvergens és határértéke $\frac{11}{4}$. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i+1}{3^i}$$

végtelen sor konvergens és összege $\frac{11}{4}$.

Hoffer János, Budapest és Kamarás Lajos, Pécs

II. megjegyzés: A feladatot általánosabban: a 3 helyett az a (0-tól és 1-től különböző) állandót szerepeltetve is megoldhatjuk a bemutatott módszerekkel. A következő zárt alakhoz juthatunk:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{ai+1}{a^i} = \frac{a^2+a-1}{(a-1)^2} - \frac{a^2+a-1+(a-1)an}{(a-1)^2 a^n}.$$

Az $a=1$ eset külön könnyen megoldható.

Bogdán Zoltán, Cegléd és Vermes Miklós, Budapest

Megoldók száma: 28.

845. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y egész számok, és kielégítik a $2x^2+x=3y^2+y$ egyenletet, akkor $2x+2y+1$ és $3x+3y+1$ négyzetszámok!

Megoldás: A $P_1=2(x+y)+1$ és $P_2=3(x+y)+1$ polinomok szorzata másodfokú polinomot szolgáltat. Erre majd alkalmazni próbáljuk a feltételi egyenlettel adott összefüggést, hogy ilyen módon egy elsőfokú polinom négyzetét állítsuk elő belőle.

$$P_1\cdot P_2 = 6(x+y)^2+5(x+y)+1 = 6x^2+12xy+6y^2+5x+5y+1 =$$

$$(*) \qquad = (4x^2+12xy+6y^2+4x+5y+1)+(2x^2+x) = (4x^2+12xy+6y^2+4x+5y+1)+$$

$$+(3y^2+y) = 4x^2+12xy+9y^2+4x+6y+1 = (2x+3y+1)^2.$$

Most megnézzük, hogy ha x és y a feltételi egyenletet — amely hiperbola egyenlete — kielégítő egész számok, akkor a P_1 és P_2 egész számok relatív prímek-e.

Tegyük fel, hogy a d pozitív egész szám közös osztójuk, azaz $d|P_1$ és $d|P_2$ teljesülnek. Ezekből a relációkból következik, hogy $d|P_1+P_2$ és $d|P_2-P_1$ is érvényesek, azaz $d|5(x+y)+2$ és $d|x+y$, ezekből pedig ahhoz jutunk, hogy $d|2$, azaz $d=1$ vagy $d=2$. Minthogy $2\nmid 2(x+y)+1$, ezért $d=1$, tehát igaz, hogy $(P_1, P_2)=1$.

A $(*)$ alatti vizsgálat értelmében a P_1 és P_2 egész számok szorzata négyzetszám. Mivel $2\nmid P_1$, ezért P_1 lehet -1, 1, vagy 1-nél nagyobb abszolút értékű páratlan szám, P_2 pedig 1, vagy 1-nél nagyobb abszolút értékű egész szám (ugyanis P_2 $3k+1$ alakú, tehát nem lehet 0 vagy -1). A $P_1\cdot P_2$ szorzat 0 nem lehet, 1 csak akkor, ha $P_1=P_2=1$.

Ha $P_1\cdot P_2$ 1-nél nagyobb négyzetszám, akkor a következő esetek lehetségesek:

a) $P_1=-1$, $P_2<-1$; c) $P_1<-1$, $P_2<-1$;
b) $P_1=1$, $P_2>1$; d) $P_1>1$, $P_2>1$.

Az a) esetben $(-1)\cdot P_2>1$ és négyzetszám, tehát $-P_2=k^2$, ahol $k>1$ és egész. De akkor $-3x-3y-1=k^2$, azaz $k^2\equiv -1 \pmod 3$, és ez ellentmondás.

A c) esetben $(-P_1)\cdot(-P_2)>1$ és négyzetszám, továbbá $(-P_1, -P_2)=1$ (ez nyilvánvalóan igaz $(P_1, P_2)=1$ miatt), ezért a számelmélet alaptételéből következően $-P_1$ és P_2 külön-külön 1-nél nagyobb négyzetszámok. A $-P_2$-t vizsgálva most is ellentmondáshoz jutunk, hasonlóan az a) esethez.

Tehát csak a b) és a d) eset valósulhat meg, és ekkor az előbbiekben említett tételek értelmében P_1 is, és P_2 is négyzetszám.

Ezzel minden lehetséges esetre igazoltuk a feladat állítását.

Megoldók száma: 12.

846. Szerkesszünk háromszöget, ha adva van a, m_a és $\beta-\gamma$!

I. megoldás: Mivel a háromszög szögei szögtartományok, és szerkesztésnél valamilyen adott ponthalmazból indulunk ki, ezért a $\beta \geqq \gamma$ relációt kielégítő háromszöget keresünk.

Ha $\beta-\gamma$ nullszög, akkor egyenlő szárú háromszög szerkesztése az a és m_a adatokból mindig egyértelműen könnyen végrehajtható.

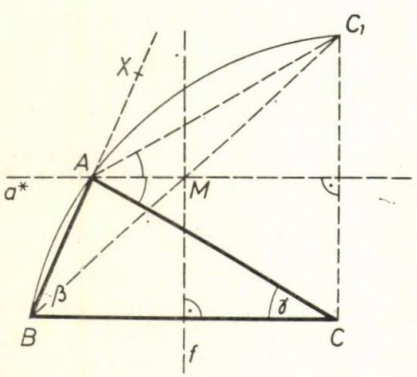
Ha $\beta-\gamma$ 0-tól különbözőnek van adva, akkor csak $0<\beta-\gamma<\pi$ esetén várhatunk megoldást.

Tegyük fel, hogy szerkeszthető olyan háromszög, amelyben a, m_a és $\beta-\gamma$ az adottal egyenlő (1. ábra). A $\beta>\gamma$ reláció miatt érvényes a $b>c$ is, ezért A belső pontja annak a félsíknak, amely B-t tartalmazza, és amelyet a BC oldal f felező merőlegese határol. Ha a háromszög szerkeszthető, akkor szerkeszthető az A-n átmenő, BC-vel párhuzamos a^* egyenes, és C-nek erre vonatkozó C_1 tükörképe is. (Ezek kínálkozó lépések, mert az adott a-ból és m_a-ból majd előállíthatók lesznek, de $(\beta-\gamma)$-t egyelőre még nem látjuk.) Szerkeszthető ezek után az AC_1 és a BC_1 egyenes is; BC_1 nyilván átmegy f és a^* M metszéspontján.

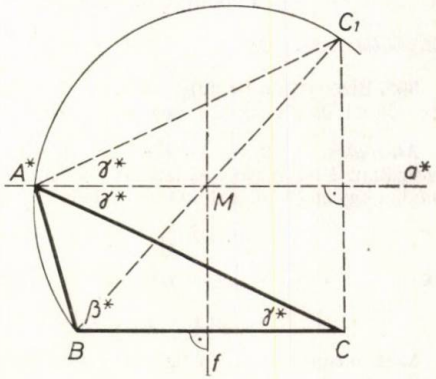
Minthogy az 1. ábra egyíves szögei egyenlők, és — X-szel jelölve az AB szakasz A-n túli meghosszabbításának egy belső pontját — $\beta=MAX\sphericalangle$ (egyállású szögek), ebből következik, hogy $C_1AX\sphericalangle=\beta-\gamma$, továbbá, hogy

$$BAC_1\sphericalangle = \pi-(\beta-\gamma).$$

Ezek után szerkeszthető a BC_1 szakasz $\pi-(\beta-\gamma)$ szögű látószög — ponthalmazából a B és pontokat összekötő, A-n áthaladó körív, amely $\beta-\gamma$ nagyságától függően lehet félkör is, nála nagyobb és kisebb ív is.



1. ábra



2. ábra

Fordítva: a tetszőlegesen adott BC szakaszból kiindulva tetszőleges m_a-val szerkeszthető az a^* egyenes, a C_1 pont, az f és a BC_1 egyenes, és az M pont is (2. ábra). Szerkeszthető továbbá $0<\beta-\gamma<\pi$ esetén a $\pi-(\beta-\gamma)$ látószögű, B-t a C_1-gyel összekötő körív a BC_1 határolta C-t nem tartalmazó félsíkban. Az a^*-nak M kezdőpontú CB irányú félegyenese az előbbi körívet mindig egyetlen pontban metszi. Jelöljük ezt A^*-gal, és kössük össze C-vel, B-vel és C_1-gyel. A megszerkesztett A^*BC háromszög β^* és γ^* szögére teljesül:

$$\pi-(\beta-\gamma) = \pi-(\beta^*+\gamma^*)+2\gamma^*, \quad \text{azaz}$$

$$\beta-\gamma = \beta^*-\gamma^*,$$

és ez azt mondja, hogy a mindig egyértelműen szerkeszthető A^*BC háromszög megfelel a feltételeknek.

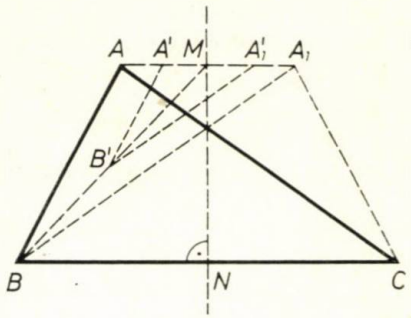
Tehát a keresett háromszög akkor, és csak akkor szerkeszthető, ha $0\leqq\beta-\gamma<\pi$, és mindig egyetlen megoldás van, tetszőlegesen adott a és m_a esetén.

Császár Attila, Zalaegerszeg és Kurcsics László, Csorna

II. megoldás: Tegyük fel az I. megoldás jelölései szerint, hogy az adatokból $(\beta>\gamma)$ szerkeszthető a kívánt ABC háromszög; akkor szerkeszthető az f felező merőleges és az ABC háromszögnek f-re vonatkozó A_1CB tükörképe is (3. ábra). Ekkor $ABA_1\sphericalangle=ACA_1\sphericalangle=\beta-\gamma$, tehát ezzel a transzformációval előállt az adott szögkülönbség. Az M középpontú, tetszőleges $\lambda>0$, $\lambda\neq1$ arányú centrális hasonlóság az MB egyenest önmagába viszi át, és a $BMN\sphericalangle$ az $\frac{a}{2}$, m_a befogójú derékszögű három-

szög m_a melletti hegyesszöge; az ABA_1 háromszöget átviszi pl a 3. ábra $A'B'A'_1$ háromszögébe, amelyre $A'B'A' \sphericalangle = \beta - \gamma$. Ha tehát szerkeszthető a kívánt ABC háromszög, akkor szerkeszthető végtelen sok $A'B'A'_1$ háromszög, amelyek az M centrumra nézve centrálisan hasonlóak.

Megfordítva: adatainkból könnyű egy ilyen $A'B'A'_1$ háromszöget megszerkeszteni (és ebből bármelyiket). Az f-et és rajta egy M pontot felvéve szerkeszthető az N és a B pont, továbbá az MB félegyenes; az M-ben f-re állított merőlegesen tetszés szerint felvesszük A'-t és az M-re vonatkozó A'_1 tükörképét; megszerkesztjük az $A'A'_1$ szakasz $\beta - \gamma$ szögű látószög-ponthalmazának „alsó" körívét, ez mindig egyetlen B' pontot tartalmaz az MB félegyenesből. Végül a B-n átmenő $B'A'$-vel párhuzamos egyenes kimetszi MA'-ből a hiányzó A csúcsot; a C-t már könnyű szerkeszteni.



3. ábra

Bogdán Zoltán, Cegléd, Kamarás Lajos, Pécs
Szánthó Gyula, Gyula és Zavarkó Józsefné, Komló

Megoldók száma: 20.

847. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög a, b, c, oldalaira és szemközti α, β, γ szögeire

(1) $$a(1-2\cos\alpha)+b(1-2\cos\beta)+c(1-2\cos\gamma)=0$$

teljesül, akkor a háromszög szabályos!

1. megoldás: Arra a kérdésre, hogy van-e olyan háromszög, amely kielégíti az (1) összefüggést, a válasz igenlő: a szabályos háromszög eleget tesz (1)-nek. Fordítva, most azt kell bizonyítanunk, hogy ha felvesszük az a, b, c szakaszokat úgy, hogy háromszöget határoljanak, és az általuk meghatározott szögekkel együtt kielégítsék (1)-et, akkor szabályostól eltérő háromszög nem jöhet létre.

Tegyük fel, hogy egy háromszögre teljesül az (1) összefüggés. A sinustétel segítségével kiküszöbölhetjük az oldalakat: az

$$a = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{és} \quad b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

kifejezéseket behelyettesítve, és mindkét oldalt a pozitív $\frac{\sin\gamma}{c}$-vel szorozva az (1)-gyel ekvivalens

$$\sin\alpha(1-2\cos\alpha)+\sin\beta(1-2\cos\beta)+\sin\gamma(1-2\cos\gamma)=0,$$

majd beszorzással a

(2) $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$$

egyenlethez jutunk.

Ismeretes a tetszőleges szögekre érvényes

(3) $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

azonosság (1. pl. Faragó: Matematikai Szakköri Feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó, Budapest, 499. feladat). Alkalmazzuk (3)-at $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ és $2\alpha+2\beta+2\gamma=2\pi$-vel, akkor ezeket kapjuk:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\pi-\beta}{2},$$

illetve

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin(\pi-\gamma)\cdot\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin(\pi-\beta),$$

és további egyszerű átalakításokkal:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$ illetve

(3*) $$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

A nyert szorzatokat írjuk be (2)-be, a sinusokat fejezzük ki a félszögek szögfüggvényeivel, és osszunk a cosinusok szorzataival, ami pozitív. Arra jutunk, hogy (1)-ből következik a

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{8} \tag{4}$$

egyenlet teljesülése.

Az első két tényező szorzatát alakítsuk összeggé, majd szorozzunk be $\sin\frac{\gamma}{2}$-vel, azt kapjuk, hogy teljesül a

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}=0$$

$\sin\frac{\gamma}{2}$-ben másodfokú egyenlet, továbbá az ebből teljes négyzetté kiegészítéssel származó

$$\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

egyenlet. Minthogy ennek bal oldala nem negatív tagok összege, ezért

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\text{és}\quad\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0 \tag{5}$$

egyszerre teljesülnek. Az utóbbi értelmében $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=0$ igaz, és mivel $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ hegyesszögek, ezért érvényes a

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$$

kettős egyenlőtlenség, ennélfogva a legutóbbi egyenlet $\alpha=\beta$-ra vezet.

Emiatt az (5) alatti első egyenlet a $\frac{\gamma}{2}$ hegyesszögre ezt adja:

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2},$$

ebből γ-ra $\frac{\pi}{3}$ adódik, és az előbbi eredmény értelmében α és β is ugyanekkora.

Azt kaptuk tehát, hogy ha egy háromszög kielégíti (1)-et, akkor valóban szabályos.

Dékány Veronika, Budapest és Polcz Katalin, Pécs

II. megoldás: Az (1) egyenlet helyett az

$$a(1-2\cos\alpha)+b(1-2\cos\beta)+c(1-2\cos\gamma)\geqq 0 \tag{6}$$

egyenlőtlenséget vizsgáljuk. Ezt így is írhatjuk:

$$a+b+c\geqq 2a\cos\alpha+2b\cos\beta+2c\cos\gamma.$$

A jobb oldalon alkalmazzuk a húrra és a hozzá tartozó kerületi szögre ismert összefüggést (r a körülírt kör sugara):

$$a+b+c\geqq 2r(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma),$$

ebből $\frac{r}{2}$-vel való szorzás után (3*) alapján a

$$t=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma,\quad a=2r\cdot\sin\alpha,\quad b=2r\cdot\sin\beta$$

képlettekkel az

$$rs\geqq 2t$$

egyenlőtlenséghez jutunk $\left(s=\frac{a+b+c}{2},\ t\ \text{a háromszög területe}\right)$, a $t=\varrho\cdot s$ összefüggéssel pedig (ϱ a beírható kör sugara) az

$$\frac{r}{\varrho}\geqq 2 \tag{7}$$

egyenlőtlenséghez, amely tehát ekvivalens a (6) alattival.

Ismeretes, hogy a (7) egyenlőtlenség minden háromszögre érvényes, l. pl. Horvay—Reiman: Geometriai feladatok gyűjteménye I., Tankönyvkiadó, Bp. 1388. feladat. Az itt található bizonyítás mutatja, hogy az egyenlőség akkor, és csak akkor érvényes, ha a Feuerbach-kör a háromszögnek mindhárom oldalát érinti, azaz ha a háromszög szabályos.

Bogdán Zoltán, Cegléd és Kamarás Lajos, Pécs

III. megoldás: Az (1) egyenlet a cosinustétel háromszori alkalmazásával a törtek eltávolítása után erre vezet:

$$a^4+b^4+c^4+a^2bc+ab^2c+abc^2-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=0.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg 2-vel, és a bal oldalt alakítsuk át így:

$$2a^4+2b^4+2c^4+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2-4a^2b^2-4b^2c^2-4c^2a^2=$$

$$=(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=$$

$$=(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+a^2(2bc-b^2-c^2)+b^2(2ca-c^2-a^2)+c^2(2ab-a^2-b^2)=$$

$$=(a-b)^2\left((a+b)^2-c^2\right)+(b-c)^2\left((b+c)^2-a^2\right)+(c-a^2)\left((c+a)^2-b^2\right)=$$

$$=(a+b+c)\left[(a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)\right].$$

Ha feltesszük (1) teljesülését, akkor ebből az elmondottak alapján következik, hogy az utoljára felírt szorzat második tényezője 0. Ez azonban három nem negatív szám összege (hiszen a háromszög-egyenlőtlenségek teljesülnek), ennélfogva mindegyik tag 0. Mivel a második tényező mindenütt pozitív, ezért az első tényezők tűnnek el: $a=b=c$, tehát a háromszög szabályos.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely, Kacsó Ferenc, Marosvásárhely, Óvári Lajos, Kecskemét, Polcz Katalin, Pécs és Zsidó Dónát, Brassó

IV. megoldás: A (4) egyenletet a $0<\omega<\pi$ szögekre érvényes

$$\sin\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}$$

azonosság alapján a cosinustétel felhasználásával így írhatjuk:

$$\frac{1}{8abc}\sqrt{(a^2-(b-c)^2)(b^2-(c-a)^2)(c^2-(a-b)^2)}=\frac{1}{8}. \tag{8}$$

A gyökjel alatti kifejezés értéke mindig kisebb $a^2b^2c^2$-nél, ha a háromszögnek van különböző oldalpárja, ezért a bal oldal minden ilyen esetben kisebb $\frac{1}{8}$-nál. Ha tehát (1) teljesül, akkor (8) is, de akkor a háromszög szabályos.

Szánthó Gyula, Gyula

Megjegyzés: Az (1) egyenlet átalakításakor fellépő $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma$ összeg a talpponti háromszög kerülete, (l. pl. A Matematika Tanítása 1974. évi 3. számában a 760. feladat megoldását).

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

Megoldók száma: 16.

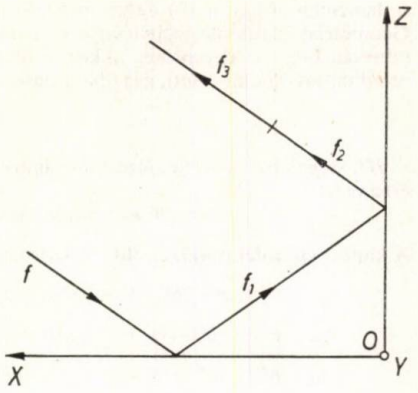
848. Három síktükör $OXYZ$ derékszögű triédert alkot. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fénysugár egymás után visszaverődik az OXY, OYZ, OZX síktükrökön, akkor iránya az utolsó visszaverődés után az első beeső sugár irányával ellentétes lesz!

I. megoldás: Ismeretes, hogy a fénysugár egy síktükörről úgy verődik vissza, hogy a beeső fénysugár egyenesének a síkra vonatkozó tükörképe éppen a visszavert fénysugár egyenese.

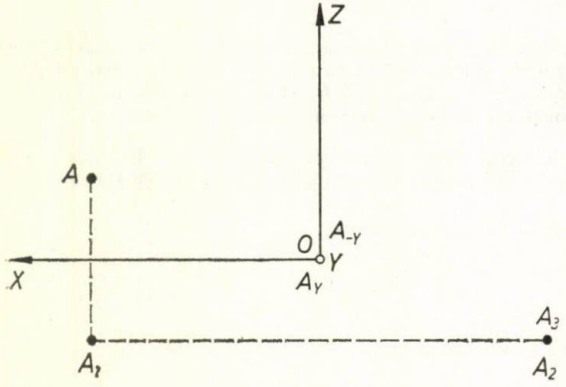
Essen az f fénysugár először az OXY síkra, erről visszaverődve mint f_1 essen a második (OYZ) síkra, innen visszaverődve mint f_2 essen a harmadik (OZX) síkra, és ennek visszavert sugara legyen f_3. Az f egyenes egy A pontjából az f_1 egyenesnek A_1, az f_2-nek A_2 és az f_3-nak A_3 pontja lesz. A 4. ábrán az OX és az OZ tengelyt képzeljük a rajz síkjára, az OY félegyenes mutasson felénk a rajz síkjára merőlegesen. A rajz az előbb említett egyeneseknek a rajz síkjára eső merőleges vetületét mutatja, de egyszerűség kedvéért nem használtunk megkülönböztető jelet a vetületekre.

Az 5. ábrán az A pontot és tükörképeit tüntettük fel. Az AA_1A_2 síkot képzeljük el a rajz síkja előtt, vele párhuzamosan. Az A_2-ből az OZX-re bocsátott merőlegesnek a képe pont, és A_3 ugyanolyan távol van a rajz síkja mögött, mint amennyire A_2 előtte van. Az AA_1A_2 sík messe az OY tengelyt A_y-ban! Könnyen igazolhatjuk, hogy AA_y-nak A_y-ra vonatkozó tükörképe A_2A_y. Az A_2-vel együtt tükrözzük A_y-t is az OZX síkra, A_y tükörképét jelöljük A_{-y}-nal. Az eddigiekből következik, hogy az OA_3A_{-y} háromszög az OAA_y háromszögnek az O-ra vonatkozó tükörképe, és hasonló módon bármilyen helyzetű A pontra ugyanezt állapíthatjuk meg.

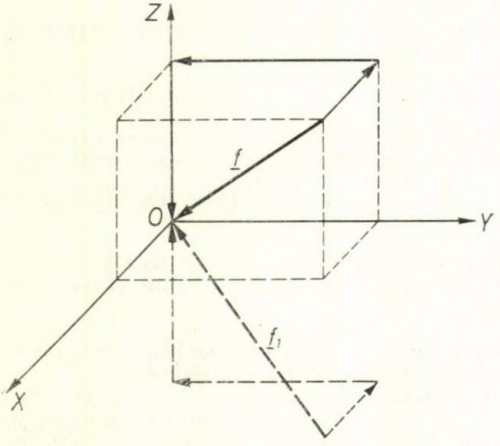
Azt kaptuk tehát, hogy a három, páronként merőleges síkra vonatkozó tükrözés szorzata a három sík közös pontjára vonatkozó tükrözés.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Ezért f-ből f_3-ba eljuthatunk az O-ra vonatkozó tükrözéssel, de ez a transzformáció egyenest önmagába vagy vele párhuzamos egyenesbe visz, félegyenest pedig ellentétes irányú félegyenesbe.

Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Vigassy Lajos, Budapest

II. megoldás: Vegyünk az első beeső fénysugárral egyező irányú $\mathbf{f}(u, v, w)$ vektort! Az OXY síkra vonatkozó tükrözés a 6. ábrán feltüntetett $u\mathbf{i}$, $v\mathbf{j}$, $w\mathbf{k}$ komponensek közül csak a harmadikat változtatja meg, mégpedig $-w\mathbf{k}$-ra. Az $\mathbf{f}$ vektor első tükörképe tehát $\mathbf{f}_1$ $(u; v; -w)$. Hasonlóan járhatunk el a következő két síkra vonatkozó tükrözésnél is. Az OYZ-re vonatkozó tükrözés eredménye az $\mathbf{f}_2$ $(-u, v, -w)$, az OZX-re vonatkozóé pedig az $\mathbf{f}_3(-u; -v; -w)$ vektor, ami éppen az $\mathbf{f}$ vektor ellentettje. Ez pedig a feladat állításának helyességét bizonyítja.

Bartha Gábor, Szentendre és Filakovszky Péter, Érsekújvár

Megjegyzés: A feladat megoldása megtalálható a következő műben: Skljarszkij—Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, Geometria I. (Planinetria), Tankönyvkiadó, Bp. 1972. (57. feladat.)

Szánthó Gyula, Gyula

Megoldók száma: 15.

Megoldók névsora (843—848.)

Almádi Jánosné, Bp. (843., 844.); Almási Béla, Ózd (843—845.); Bagi Gábor, Barcs (848); Bartha Gábor, Szentendre (843. két mód, 844. két mód, 845., 846—848. két-két mód); Bencze Mihály Kolozsvár (843., 844., 847); Bogdán Zoltán, Cegléd (843. két mód, 844—848.); Bondár Mária Csorna (843.); Császár Attila, Zalaegerszeg (843., 846.); Csorba Ferenc, Győr (843—846., 848.); Dániel Gyula, Vác (844.); Darvasi Gyula, Nyíregyháza (848.); Dékány Veronika, Bp. (844., 847.); Filakovszky Péter, Érsekújvár (843., 844. két mód, 846—848.); Füredíné Kondor Judit, Bp. (847.); Gajdács Ibolya, Érd (843., 844.); Heverdle István, Eger (844.); Hoffer János, Bp. (843., 844. két mód); Horváth Lajosné, Csurgó (844. két mód, 846.); Horváth László, Baja (846.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (843., 844., 847.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (843., 844. két mód, 845., 847., 848.); Kamarás Lajos, Pécs (843—848.); Kelemen Lajos, Kisvárda (843., 844., 848.); Kishalmi Rózsa, Szeged (843., 844., 846., 847.); Kovács Gábor, Komárom (843—847.); Kun Péter, Szentendre. (843., 846.); Kurcsics László, Csorna (843., 844., 846.); Mészáros József, Galánta (843., 846., 847.); Óvári Lajos, Kecskemét (843., 844. két mód, 845—847.); Polcz Katalin, Pécs (843., 844., 846., 847; két mód); Sebestyén László, Bp. (846.); Szánthó Gyula, Gyula (843—844. két-két mód, 845—848.), Szigeti Béláné, Győr (844.); Szilágyi István, Esztergom (843., 845., 848); Vermes Miklós, Bp. (843., 844., 848.); Vigassy Lajos, Bp. (846., 848.); Wekszli Árpád, Csorna (843—845.); Zavarkó Józsefné, Komló (846.); Zsidó Dónát, Brassó (843., 844., 846—848.); Zsidó György, Kolozsvár (843—845., 848.).

KÖNYVISMERTETÉS

Bizám György—Herczeg János:

Sokszínű logika

(Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 435 oldal, 45.—Ft)

A könyv 175 részletesen kidolgozott logikai feladatot tartalmaz a következő érdekes címek alatt: Egy kis bemelegítés (14 feladat), Csináljunk rendet (24 feladat), Pénzről van szó (10 feladat), Logika a mérlegen (6 feladat), Válogatás láthatatlanban (15 feladat), Az aranymosók, a gyík és a bergomobil (11 feladat), Keverés a laboratóriumban (5 feladat), Kupamérkőzések (9 feladat), Betűlottó (24 feladat), Számkeresztrejtvények (22 feladat), Igazság és hamisság (23 feladat), Gondolatolvasás (12 feladat).

A szerzők könyvük megírásakor arra törekedtek, hogy többféle igényt is kielégítsenek. Azt akarták, hogy a könyvben olvasnivalót találjanak maguknak az általános iskolai tanulók is, és az egyetemet végzett felnőttek is; használhassa könyvüket az is, aki csak szórakoztató fejtörőt keres egy üres órájára, az is, aki a matematikai gondolkodásmód alapjait szeretné elsajátítani, és az is, aki már képzett matematikus. A feladatok kiválasztása és a megoldások megszövegezése segíti e többféle cél elérését. Hogy minden olvasó az igényeinek megfelelő szinten tájékozódhasson és dolgozhasson, már a feladatok kitűzésénél különféle jelekkel látták el a legfiatalabb, a csak szórakozni kívánó, a rendszeres feldolgozásra hajlandó, illetve a matematikában már járatos olvasóknak szánt feladatokat. A megoldások szövegét pedig háromféle betűtípusból szedték attól függően, hogy röviden fogalmazott eredményről, részletesen kidolgozott megoldásról vagy kiegészítő megjegyzésekről van-e szó. Ezek a szövegrészek külön-külön is és együttesen is olvashatók és megérthetők. A kötet így tulajdonképpen három (helyenként több) egymásba skatulyázott könyvből áll.

Külön fel kell hívni a figyelmet arra az útmutatásra, amit a szerzők a kötet anyagának iskolai feldolgozására adnak. Ez először egy olyan tárgymutatóból áll, amely a feladatokat matematikai témájuk (tárgykörük vagy a megoldásban alkalmazott módszerek) szerint csoportosítja. Ilyen tárgykörök például: matematikai logika, függvények, relációk, oszthatóság, számelmélet, kombinatorika, diofantikus egyenletek. Ilyen módszerek például: analógia, logikai szimmetria, teljes indukció, rekurzió, élesítés, általánosítás, skatulyaelv. Másodszor a szerzők konkrét javaslatokat tesznek a feladatok szakköri feldolgozására mind az általános iskolai, mind a középiskolai szakkörök számára.

A kötet nemcsak hasznos segédeszköz lehet az általános és a középiskolai szakkörökön, hanem értékes ajándékkönyv az érdeklődő gyereknek, felnőttnek egyaránt.

Scharnitzky Viktor

3,50 Ft

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

	Fűzve
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztály matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Előd Istvánné: Számoljunk együtt 5—6. osztály (52 314)	10,—
Gádorné—Vári: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztályában (92 325)	20,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium I. osztályában a matematika tanításához (92 121)	20—,
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (90 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Szintezési útmutató a 10 121/I-II-III. sz. Matematikai feladatgyűjteményhez. Szerkesztő: Némethy Katalin (92 331)	10,—
Tatár István: Matematikai mozaik a matematikatagozatra előkészítő 5—6. osztályos szakkörök számára (19 009)	12,50
Hámori Miklós: Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. Az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Obádovics—Szelezsán: Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (29 215)	12,—
Kovács Győző: Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet) (29 227)	11,—
Lukács Ottó: Koordinátageometria vektorokkal a síkban és a térben (Középiskolai szakköri füzet (29 219)	13,50
Jakab Albert—Pelle Béla—Perge Imre—Szepessy Bálint: Gyakorlati számolások (29 209)	10,50
Dr. Fodor János—Dr. Horváth Attila—Rábai Imre—Székely Jenő: Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára I. kötet 8141/I.	22,—
II. kötet 8141/II.	28,50

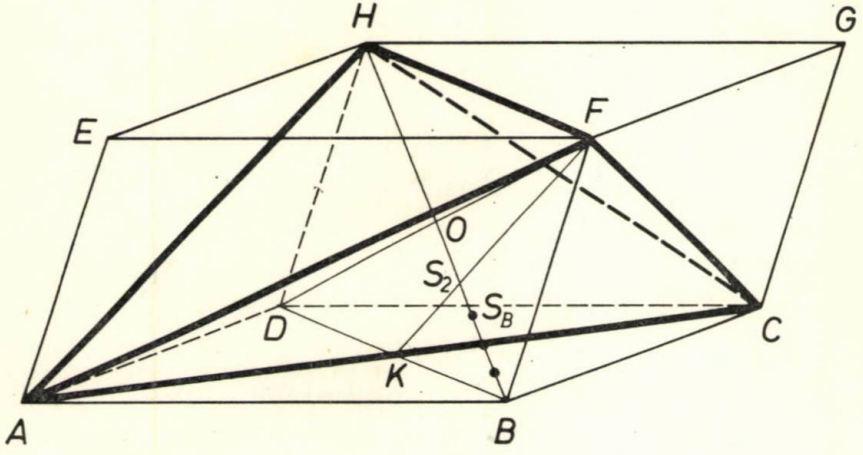
Beszerezhetők a
17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.)
44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

MEGYEI KÖNYVTÁR Szolnok



1977. augusztus * XXIV. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 228-238.
77-2823 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI, Budapest V., József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 14 Ft. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy a közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek. A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

C. Nemény Eszter: Az általános iskolák 1978-ban bevezetendő új matematika-tantervéről 65
Részletek egy Pollák Györgytől érkezett levélből 67
Dr. Varga Tamás: Relációk és függvények . 69
Oláhné dr. Erdélyi Mária: Az 1777-es Ratio Educationis 75
Molnár Zoltánné: Matematika-felvételi tanító szakon 80
Bereznai Gyula: Újabb bizonyítás a számtani-mértani közép egyenlőtlenségre ... 82
Vigassy Lajos: A négyzetes gúláról 84
Csillay Gyuláné: Új matematika-tantervek a dolgozók általános iskoláiban 87

FELADATOK 89

KÖNYVISMERTETÉS 96

СОДЕРЖАНИЕ

Ц. Естер Неменьи: О новых программах по математике, которые вводятся в восьмилетних школах в 1978-ом году .. 65
Отрывки из письма поступившего от Дьердья Поллака 67
Д-р. Тамаш Варга: Соотношения и функции 69
Олахнэ, д-р. Мария Ердельи: "Ratio Educationis" 1777-ого года 75
Золтаннэ Мольнар: Приёмные экзамены у учителей начальных школ по математике 80
Дюла Березнаи: Более новое доказательство неравномерности среднего арифметического-геометрического 82
Лайош Вигашши: О квадратной пирамиде 84
Дюланэ Чиллаи: Новые программы по математике для вечерних школ 87

ЗАДАЧИ 89

НОВЫЕ КНИГИ 96

INHALT

Frau Eszter Cervenák (geb.: *Neményi*): Über den neuen Mathematik-Lehrplan der Grundschule, der im Jahre 1978 eingeführt wird 65
Teile eines Briefes von *Dr. György Pollák* . 67
Dr. Varga, Tamás: Relationen und Funktionen 69
Frau Dr. Mária Oláh (geb.: *Erdélyi*): Die Ratio Educationis aus 1777 75
Frau Mária Molnár (geb.: *Moldoványi*): Aufnahmeprüfungin Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten 80
Bereznai, Gyula: Ein neuer Beweis der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel 82
Vigassy, Lajos: Über die Pyramide mit quadratischer Grundfläche 84
Frau Piroska Csillay (geb.: *Polákovics*): Neue Mathematik-Lehrpläne in der Grundschule der Werktätigen 87

AUFGABEN 89

BUCHBESPRECHUNG 96

C. NEMÉNYI ESZTER
főelőadó, OPI

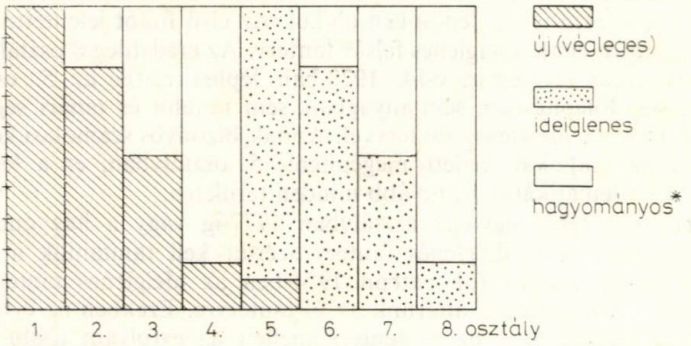
Az általános iskolák 1978-ban bevezetendő új matematika-tantervéről

A Matematika Tanítása című lap több számában foglalkozott a közelmúltban az általános iskola alakuló tantervével (1976/3., 1977/1.). *1978-ban életbe lép az az új tanterv, amelyet az ideiglenessel is szembeállítva „véglegesenek" szokás nevezni.* Ezzel az új tantervvel kapcsolatban szeretnék néhány kérdésre válaszolni.

1. Milyen tantervek lesznek érvényben 1978-ban?
2. Van-e lényeges különbség az ideiglenes és az új tanterv között?
   a) Koncepciók, módszertani elvek stb.
   b) Alsó tagozatos anyag.
   c) Felsős anyag.
3. Mit jelent a pedagógusoknak az, hogy 1978-ban bevezetjük a végleges tantervet?

1. *Milyen tantervek lesznek érvényben 1978-ban?*

Nézzük előbb a táblázatot, amely az osztályok százalékos megoszlását mutatja:



Az új matematika-tantervet megelőző ideiglenes változat lépcsőzetes bevezetését 1974-ben kezdtük el. Az első osztályok 8, 15, 50%-a tanult, és 1977-ben 80—90%-a tanul az ideiglenes tanterv szerint. Szintén 1974-ben lépett életbe a felső tagozatban az az átmenetinek tekinthető ideiglenes tanterv, amely még a hagyományos alsó tagozatra épült. Az 1. és 5. osztályban ideiglenes tanterv szerint induló gyerekek jelenleg eszerint is haladnak tovább.

1978-ban, amikor az új „végleges" matematika-tanterv lép életbe, határozottan elválik az alsó és felső tagozat sorsa. A 2. kérdésre adható válasz indokolja, hogy az alsó tagozaton mindössze kétféle tanterv lesz érvényben: az *új tanterv* szerint halad az 1., 2., 3. és 4. osztályoknak 100, kb. 80, 50, illetve 15%-a, a többi a *hagyományos tanterv* szerint fejezi be az alsó tagozatot. Ez már az ideiglenes (átmeneti) tanterv szerint folytatódik ötödikben. A felső tagozaton még háromféle tanterv szerint haladnak a gyerekek. 5. osztályba ér az a szűk réteg, amely 1974-től az ideiglenes tanterv szerint halad (az akkori első osztályok 8%-a). Az ő munkájuk az *új, végleges tanterv* szerint folytatódik. Az ötödik osztályok többi része (kb. 92%-a) az *ideiglenes tanterv* szerint tanulja a felső tagozaton a matematikát. A 6., 7. és 8. osztályban a grafikonról leolvasható arányban halad egymás mellett az *ideiglenes* és a *hagyományos tantervű* oktatás.

A fent leírt megoszlást indokolják a következők.

* A korszerű ellentéte a korszerűtlen, nem a hagyományos. A hagyományos elnevezés haladó, jó hagyományokat és avultat is fed. Csak az utóbbinak akarunk hátat fordítani.

2. *Van-e lényeges különbség az ideiglenes és az új tanterv között?*

Az 1974 februárjában ideiglenesen elfogadott matematika-tantervet 10 éves kísérleti munka és kb. kétéves vitákban, szakmai és szélesebb társadalmi bírálatokban való csiszolódás, új és új átformálás alakította ki. Az *alapvető* szemléletbeli, módszertani és szerkezeti-tartalmi jegyeket az azóta több ízben és igen széles körben végzett bírálatok nyomán már nem módosítottuk.

A tanterv *alsó tagozatos anyaga* lényegében változatlan. A követelmények szinte csak stiláris átfogalmazása, egy részüknek minimum-szintként való kijelölése jelenti a legfőbb különbséget az ideiglenes és új tanterv közt. Ez indokolja, hogy nem kell az ideiglenes tanterv szerint kifutniuk azoknak az alsós osztályoknak, amelyek 1978 előtt kezdték az ideiglenes szerinti tanulást. Akik tehát például az első három osztályt végezték az ideiglenes tanterv szerint és 1978-ban lesznek negyedikesek, azok a 4. osztályt már az új tanterv szerint fogják végezni. Ez az áttérés sem szemléletben, sem módszerekben, sem anyagban nem kíván mást, mint amit az ideiglenes tanterv is kíván.

A *felső tagozaton* nemcsak az osztályok kapcsolódnak be lépcsőzetesen a tantervreformba, de a reform is két lépcsőben alakul. Az első fokot jelentette a hagyományos alsó tagozatra épülő ideiglenes felsős tanterv. Az eredetileg 8 osztályra tervezett reformtanterv felső tagozaton csak 1978-ban léphet életbe az 5. osztályok kb. 8%-ában. Ez sem fölépítésben, sem anyagban, sem tanulói és tanári segédanyagokban nem egyezik az ideiglenes tantervvel. Annak bizonyos számolási készségszintre támaszkodva az alapokat kellett megépítenie 5. osztályban, ez a legszélesebben megalapozott matematikát építi tovább minden területen.

Felső tagozaton tehát egy-egy osztályban 1977-ig vagy a hagyományos, vagy a hagyományosra épülő ideiglenes tanterv szerint kell tanítaniuk a nevelőknek. 1978-tól pedig — amilyen fokozatban 1974-ben az ideiglenes tantervet kezdték megvalósítani — fokozatosan áttérünk az új tantervre. Ezekben az évfolyamokban szintén kétféle tanterv lesz: az új tanterv mellett az évfolyam többi osztályában az ideiglenes szerint haladnak.

A grafikonról az is leolvasható, hogy az új tantervre való 100%-os áttérés az 1. osztályokban 1978-ban valósul meg, és csak 1982-ben ér fel a 100% a felső tagozatra. 1982-ben fogunk egységes tanterv alapján haladni az 5. osztályokban és 1985-ben az általános iskolák valamennyi osztályában.

3. *Mit jelent a pedagógusoknak az, hogy 1978-ban bevezetjük a végleges tantervet?*

Szembe kell néznünk azzal a ténnyel, hogy a tanítók többsége az új tanterv matematika-anyagát eleinte csak félig-meddig értve kapcsolódik be a reformba; a sokféle új gondolat évek alatt, sokszor a gyerekekével együtt érik meg. Az új szemléletmód, új tanítói szerep kialakulása még ennél is hosszabb folyamat. „A fő veszély az, hogy megváltozottnak mondjuk és tekintjük azt, ami pedig a változásnak csak a kezdetén van." (Varga Tamás: Hogyan fogadta a pedagógusközvélemény az általános iskolák 1—8. osztályos előzetes matematika-tantervét? A Matematika Tanítása, 1976/3.) Tényként kell elfogadnunk, hogy a megvalósuló tanterv nem az, aminek a tervezői megfogalmazták. Kevesebb is, több is. Keret, amit meg kell tölteni. Alakulnia, fejlődnie kell a gyakorlatban, minden tanító és tanár munkájában. Annyira lesz jó a tanterv, amennyire jót a gyakorló pedagógus kihoz belőle — ez lesz a valóság. Ha elfogadtuk az alapvető elképzeléseket, a szemléletet, módszertani alapelveket, és az anyag felépítésével is sikerült egyetértenünk, akkor a magunk tapasztalataiból és mások példájából kialakul számunkra az a tanterv, amit

csak idézőjelesen mondhatunk „véglegesnek". Tevékeny, alkotó részesei leszünk így egy *állandóan fejlődő* tantervnek, amelynek éppen a gyerekek és a fejlődő világ igényeinek és adottságainak szem előtt tartása, az állandó fejlődés lehet az egyetlen igazán végleges oldala.

Nem szabad türelmetleneknek lennünk magunkkal szemben sem, de tanulnunk kell mindig, minden kollégától és minden gyerektől. Nem szabad az iskola vezetésnek és a felügyeletnek sem türelmetlennek lennie: segítenie kell ott, ahol a legnagyobb szükség van a segítségre. Mégpedig leginkább azoknak kell segítenünk, akik még a legtávolabb járnak, talán még szemben állnak az újra való áttéréssel. Meggyőződése ellenére senki sem szolgálja a reform ügyét: ha papíron be is kapcsolódik az új tanterv megvalósításába, ellene dolgozik akaratlanul is, ha értés és egyetértés nélkül kell valamit így vagy úgy végeznie. Szerencsésebb a folyamat, ha még a hivatalos bekapcsolódás előtt sikerül megnyernünk mindenkit: ezért a helyi továbbképzések és bemutató órák tettek és tehetnek még igen sokat.

Részletek egy Pollák Györgytől érkezett levélből

Megjegyzések az általános iskola 7. osztályának ideiglenes tankönyvéről

Az alábbiakban néhány bíráló észrevételt szeretnék tenni a címben említett könyvről, helyesebben annak egy részletéről. Helyenként éles hangot fogok használni, mert az ügy (a matematikaoktatás reformjának minél tökéletesebb megvalósítása) megérdemli a szenvedélyes állásfoglalást. Ezért előre kívánom bocsátani, hogy megjegyzéseim éle semmiképpen sem a könyv alkotói ellen irányul, akik egytől egyig a hazai matematikatanítás magasabb színvonaláért legtöbbet és legeredményesebben tevékenykedő kartársak közé tartoznak. Szeretném, ha közös ügyünkben harcostársuknak tekintenének és jelen írásomat is ebben az értelemben fognák fel. Minden könyvön akad javítani való, s örüljünk, hogy most már nem a reménytelenül elavult tankönyvek helyett kell valamivel korszerűbbekre törekednünk, hanem a korszerűséget és a magasabb színvonalat kívánhatjuk meg magunktól még következetesebben.

Bizonyára mindenki, aki a könyvet kézbe veszi, egyet fog érteni velem abban, hogy a 20. pont a könyv legproblematikusabb része, elsősorban az anyag egyéb részeivel való összefüggése, illetve össze nem függése miatt. A reláció fogalma a könyv további részében jóformán egyáltalán nem fordul elő, még azon ritka részeknél sem, ahol erre lenne alkalom; de kétségtelen, hogy a későbbi anyag jellegénél fogva nem is túlságosan alkalmas relációk használatára. Akkor viszont mire jó bevezetni? Tudom, hogy ez a könyv az átmeneti osztályok számára készült, de ennyire „hibrid"-nek azért nem kellene lennie. Egyáltalában, jó lenne már tudomásul venni, hogy használható tantervet (általános iskola alsó tagozatától egyetemig) csak egységes koncepció alapján lehet csinálni; az olyan tanterv, amely úgy készül, hogy egy heterogén összetételű bizottság minden tagjának (s még néhány más személynek) szempontjait összeegyeztetik, csak arra lesz jó, hogy minden eddiginél nagyobb ködöt kavarjon a tanulók, sőt a kentaur-tananyagot oktatni kényszerülő tanárok fejében. Ebben a könyvben is a függvény ugyan (két halmaz között értelmezett) reláció, de ugyanakkor szerepel a félhomályban hagyott „változó" fogalma, amelynek „értékeihez" a függvény más értékeket rendel (pl. 167. old.). Értelmezési tartományról, értékkészletről, amivel a kétféle kifejezésmódot össze lehetne kapcsolni egymással, nem esik szó. A geometriai transzformációkat a könyv nem a függvények speciális

eseteiként kezeli, holott a függvény relációként való bevezetésének éppen az egységes szemlélet kialakításában s az ebből adódó előnyökben (tágabb asszociációs lehetőségek az intuitív gondolkodásban, különböző területeken érvényes azonos jelenségek egyszerre való tárgyalása a logikus felépítésben) rejlik az értelme.

Más következetlenségek is előfordulnak. Így a függvényt a tankönyv úgy értelmezi, mint olyan relációt, amelyik az „egyik" halmaz minden elemének a „másik" halmaz egyetlen elemét feleltteti meg (pl. 144. old. első bekezdése; a 167. oldalon is „a változó minden értékéről" van szó), ugyanakkor a tanári kézikönyv 157. oldalán a függvényt határozottan parciális leképezésként definiálják s ugyanezt az értelmezést feltételezi az 1. feladat utolsó kérdése. Igaz, ahol a tankönyvben kifejezetten definícióra kerül sor, ott óvatosan nyitva hagyják a kérdést (138. old.): a függvény „az egyik halmaz elemeihez" rendel hozzá valamit, ahelyett, hogy némelyik eleméhez vagy minden eleméhez rendelne hozzá. Ez azonban mindkét változatnál rosszabb: a tanulókat nem lehet elég korán rászoktatni a „minden" és a „van olyan" vagy szinonimáik szabatos és következetes használatára, s az imént említetthez hasonló mondatok kiküszöbölésére. A magam részéről úgy gondolom, hogy ezen a fokon még nem érdemes a függvény fogalmát azzal bonyolítani, hogy megengedjük a nem mindenütt értelmezett függvényt; vagy hát meg kell különböztetni speciális esetétől, a (mindenütt értelmezett) leképezéstől.

Eddig a könyv terminológiájához alkalmazkodva használtam a reláció kifejezést, most azonban rátérek arra, hogy ezt a szóhasználatot rendkívül szerencsétlennek tartom, bár tudom, hogy külföldön sok jeles matematikus definiálja úgy a relációt, mint könyvünk. Nálunk azonban inkább dívik a „megfeleltetés" elnevezés, a „reláció" szót pedig fenntartjuk arra az esetre, amikor az indulási és érkezési halmaz megegyezik (lásd pl. Csákány Béla: Algebra című jegyzetét). Mindenesetre erre a fontos speciális esetre múlhatatlanul szükséges külön elnevezést használni, ha nem akarunk teljes zűrzavart előidézni. Tavalyelőtt a televízió kitűnő általános iskolai továbbképző sorozatában láttam egy szellemes oktató filmet a relációkról, amely azonban ezt a szót a „megfeleltetés" értelemben használta, s ugyanakkor beszélt szimmetrikus és tranzitív relációkról, aminek csak a speciális esetben van értelme. Máig bűnösnek érzem magam, hogy nem írtam akkor a film szerzőjének (ahogyan szándékomban állt), s nem hívtam fel a figyelmét erre a legkevésbé sem jelentéktelen pontatlanságra. — A mi könyvünkben a botrány még nem tör ugyan ki, mivel megfeleltetések speciális osztályairól nem történik említés (kivéve a függvényeket), de árnyékát már előreveti (pl. 134. old.: „a nagyobb reláció ugyanazon halmaz elemei között *is* létesíthet kapcsolatokat"; lásd még Tanári kézikönyv 85. oldal). A „nagyobb" reláció tulajdonságai a irreflexivitás, az antiszimmetria és a tranzitivitás, ezek pedig értelmüket vesztik, ha különböző halmazok közötti megfeleltetésre próbáljuk alkalmazni őket. Más kérdés, hogy ha két halmazunk van, A és B, s mindkettőben szerepelnek ugyanazon R rendezett halmaz bizonyos elemei (pl. természetes vagy valós számok), akkor az A halmazban levő R-beli elemeknek megfeleltethetjük a B halmaz azon elemeit, amelyek (R-ben!) nagyobbak náluk. *Ez* a megfeleltetés (és nem a „nagyobb" reláció) valóban lehet függvény (lásd a 9. feladatot), de ennek semmi köze a halmazok véges vagy végtelen voltához, ahogyan a kézikönyv sugalmazza.

A hetedikes könyvet véletlenül vettem kézbe, bizonyára a többi ideiglenes tankönyvön is van, ami javításra szorul. Ez rendjén is van, hiszen mindnyájan csak most ismerkedünk ezzel az anyaggal,

legalábbis ami az aktív használatát illeti. Baj csak akkor lenne, ha az első vagy a második, vagy akárhányadik változatát a tantervnek vagy a tankönyvnek annyira véglegesnek tartanánk, hogy megszűnnénk azon gondolkozni, hogyan lehetne őket még tovább tökéletesíteni.

Pollák György

Dr. VARGA TAMÁS
főelőadó, OPI

Relációk és függvények

Pollák György levele örvendetes példája annak, amikor egy matematikus értően és segítő szándékkal szólal meg iskolai matematika dolgában. Bírálatát senki sem veszi zokon, bár nem mindenben értünk — mondjam csak a magam nevében: értek — vele egyet. De abban feltétlenül, hogy vannak tisztázni valók a reláció és a függvény fogalma körül. Amit a négy évre szóló ideiglenes tankönyvek — és egyéb dokumentumok, segédletek — még nem tudtak tisztába tenni, akörül teremtsenek rendet legalább a most munkában levő, tíz-tizenöt évre tervezett könyvek!

Szóhasználati kérdésekről van szó, és ezekben a matematikusok mint közismerten értelmes lények igyekeznek elkerülni a „*helyes, nem helyes*" kategóriákat. Jobban szeretik ezeket:

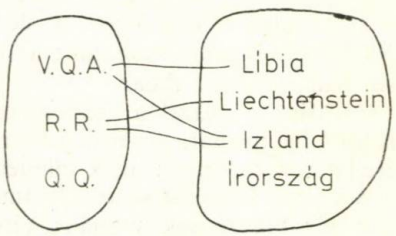
a) *Szokás, nem szokás.*
(Ez ténykérdés, de különválasztandó attól, kövessük-e a szokást.)
b) *Tetszik, nem tetszik.*
(Ha szubjektívek vagyunk, legyünk őszintén azok.)
c) *Következetes, nem következetes.*
d) *Célszerű, nem célszerű.*

(Ezek összefüggenek egymással és sokféle szempont mérlegelését kívánják.)

A felvetett kérdések annyi újabb kérdést vonnak maguk után, hogy hely sem jutna itt a megbeszélésükre, a körülöttük — nálunk és más országokban is — folyó viták ismertetésére. Ehelyett először röviden és rendszerezetlenül — de azért nem rendszertelenül — felsorolok néhány megvitatásra szánt álláspontot, módot adva a kedves olvasónak, hogy ízlelgesse a különféle véleményeket. Azután néhány megjegyzésben magam is leteszem a garast.

A) Az olyan mondatok, mint „Vidrócki Q. Agenor járt Líbiában" (vagy: „az e egyenes illeszkedik az α síkhoz" stb.) relációt fejeznek ki V. Q. A. és Líbia (illetve e és α) közt.

B) Az előbbi mondatok nem fejeznek ki relációt. Ahhoz, hogy relációnk legyen, először is ismernünk kell azt a két halmazt, amelynek az elemei a reláció szempontjából szóba jöhetnek (pl. személyek és országok vagy egyenesek és síkok egy-egy halmaza), másodszor pedig minden olyan elempárról, amelynek egyik eleme az első halmazból, a másik a másikból való, tudnunk kell, érvényes-e rájuk a reláció. Rajzban például így adhatunk meg egy relációt:



C) A reláció matematikai fogalma szempontjából tartalmi kérdések érdektelenek. A lerajzolt relációt tökéletesen megadjuk azzal, ha felsoroljuk a lehetséges 12 rendezett pár közül azt a négyet, amelyre a reláció teljesül, amely a relációhoz tartozik:

V. Q. A. és Líbia
V. Q. A. és Izland
R. R. és Liechtenstein
R. R. és Izland

A reláció a lehetséges párok halmazának (vagyis a két halmaz Descartes-féle szorzatának) egy részhalmaza, attól teljesen függetlenül, hogy azt fejezi-e ki: *járt ott*, vagy azt: *állampolgára*, vagy csak annyit: *már hallott róla.*

D) Az előbbiek egyike sem reláció. Két különböző halmaz elemei között nem adhatunk meg relációt, csak egy halmazon belül. Ha H egy halmaz, akkor reláción a $H \times H$ Descartes-féle szorzatnak egy részhalmazát értjük.

E) Ebből annyi elfogadható, hogy nem két halmaz közt értelmezünk relációt, hanem egy halmazon belül. De az nem, hogy a reláció a $H \times H$ szorzathalmaznak egy részhalmaza. Ebben a tekintetben elfogadhatóbb a *B)*-ben kifejtett álláspont. $H \times H$-nak egy-egy részhalmaza több különböző relációnak is karakterisztikus halmaza lehet. A *reláció* szó — a *tulajdonság* szóhoz hasonlóan — tartalmat (intenziót, sőt intenciót) is kifejez, nemcsak terjedelmet (extenziót). Például a {3; 5; 10} halmazon a „páratlan" és a „6-nál kisebb" tulajdonságok karakterisztikus halmaza ugyanaz a {3; 5} halmaz, de ettől még „páratlan" és „6-nál kisebb" nem válik ugyanazzá a tulajdonsággá. Ugyanezen a halmazon az „5-tel kisebb nála" és a „feleakkora" reláció karakterisztikus halmaza egyaránt az egyetlen (5; 10) párból áll, de ez nem teszi egyezővé a két relációt.

F) A reláció fogalmát ne szűkítsük le kétváltozós (kéttagú, bináris) relációkra. A tulajdonságok is relációk, csak egyváltozósak. Sőt az állítások (ítéletek, kijelentések) is: nullaváltozós relációk. Lehet egy reláció három- vagy többváltozós is. Akárhány változója van, nézhetjük tartalmi szempontból vagy absztrahálhatunk a tartalmától. Például a kijelentéseket megkülönböztethetjük aszerint, hogy mit állítanak, de lehet olyan eset, amikor csak az érdekel minket, igazak-e vagy hamisak. Vagy vegyünk olyan kétváltozós relációkat, amelyeket egy-egy három-, illetve négyelemű halmaz elemei között értelmezünk. Bizonyos problémákban nem lényeges, hogy mik az elemeik, csak a halmazok számossága számít. Más problémákban lényeges, hogy mik a halmazok elemei, de az nem, hogy milyen tartalmat fejez ki a reláció, elég megadni azoknak a pároknak a halmazát, amelyekre teljesül. Ismét más esetekben tartalmilag is érdekel minket a reláció. Az elnevezést mindezekben az esetekben használhatjuk, csak derüljön ki minden alkalommal, hogy akkor éppen hogyan értjük.

G) Minden függvény reláció, de nem minden reláció függvény. Függvényen egyértékű relációt értünk: az első halmaz minden eleméhez a másik halmaznak pontosan egy eleme tartozik.

H) Mint *G)*, de nem „pontosan egy", hanem „legfeljebb egy".

I) Minden reláció függvény, de nem minden függvény reláció. Relációknak a logikai függvényeket nevezzük: az olyan függvényeket, amelyeknek az értékkészlete az {igaz; hamis} halmaz.

J) Mint *I)*, ezzel a módosítással: „... amelyeknek az értékkészlete az {igaz; hamis} halmaznak egy nem üres részhalmaza". Egy logikai függvény ugyanis lehet értelmezési tartományának minden helyén igaz vagy minden helyén hamis is.

K) Csak látszólagos az ellentmondás *G)* és *J)* vagy *H)* és *J)* közt. Az egyváltozós függvények speciális kétváltozós relációk, az utóbbiak viszont speciális

kétváltozós függvények. (Hasonlóan más n, illetve $n+1$ értékekre is.) Például $y=x^2$ és $x^2+y^2=1$ egyaránt kétváltozós reláció és egyben speciális kétváltozós függvény (logikai függvény, amely bizonyos $(x; y)$ párokhoz az *igaz*, másokhoz a *hamis* logikai értéket rendeli). De ha logikai értéküket igaznak rögzítjük, akkor csak az első, $y=x^2$ függvény, mert csak ez rendel x-nek minden szóba jöhető (valós) értékéhez egyetlen y értéket úgy, hogy az állítás igaz legyen. Az $x^2+y^2=1$ reláció a $(-1; 1)$ intervallum belsejében többértékű és így nem függvény. Pontosabban: nem egyváltozós matematikai függvény. (Ha logikai értékét változni engedjük, akkor függvény: kétváltozós logikai függvény.)

L) Az ellentmondás nem oldódott fel. Függvény és reláció alapvetően különböző fogalmak. A függvényeknek vannak bemenő változóik és van kijövő változójuk. Önmagában véve $y=x^2$ éppúgy nem egyváltozós függvény, mint ahogy $x+2y+3z=10$ sem kétváltozós függvény. Az $y=x^2$ egyenlet aszerint ad meg egy egyváltozós függvényt (például a valós számok halmazán) vagy nem ad meg semmilyen függvényt, hogy x-et vagy y-t tekintjük-e benne bemenő változónak. Az $x+2y+3z=10$ egyenlettel viszont három különböző kétváltozós függvényt is megadhatunk aszerint, hogy x, y és z közül melyik kettőt tekintjük benne bemenő változónak (röviden: változónak), és melyikük jelöli a kijövő változót (függvényértéket). Igaz, hogy gyakran jelöljük x-szel a változót és y-nal a függvényértéket, és az utóbbi rendszerint egyedül áll a függvényt leíró egyenlet bal oldalán, de más jelölések is jogosak. Kimondva vagy hallgatólagosan egyet kell értenünk a változók szereposztásában ahhoz, hogy függvényről beszélhessünk. Relációk esetében ilyen megkülönböztetés nincs.

M) De van: az „édesanyja" reláció más, mint az „édesanyának gyermeke" reláció. Az előbbi függvény, mert mindenkinek csak egy szülőanyja van, de az utóbbi (amely az előbbinek inverze) nem az. A „nagyobb" és a „kisebb" az egész számok halmazán éppúgy két különböző reláció, mint az „1-gyel nagyobb" és az „1-gyel kisebb". De az utóbbiak egyértelműek, ezért nem is akármilyen relációk, hanem függvények.

N) Utólag hasznos és eszméltető lehet ilyen és egyéb kapcsolatokat létesíteni reláció és függvény közt, de didaktikailag helytelen így kezdeni a tanításukat. Ismerkedjenek meg a függvénnyel mint alapfogalommal a saját jogán. Egyébként a visszavezetés többváltozós függvények esetén sántít: a bemenő adatoknak a kimenő adattól való megkülönböztetése olyan többlet, ami lehetetlenné teszi, hogy a többváltozós függvényeket $(n>1)$ a náluk 1-gyel több változójú relációk $(r=n+1)$ speciális esetének tekinthessük.

Melyik véleménnyel tudom a magamét leginkább azonosítani? Szimpátiám leginkább *F)* és *N)* mellett van. Miért? Azt hiszem azért, mert kifejeződik bennük egyrészt a jelentésváltoztatás joga, másrészt a pedagógia szempontrendszere. Összekapcsolva a kettőt: a fejlődés, fejlesztés szempontjai. *F)* is úgy értendő: ne próbáljuk a relációt mindjárt kezdettől minden n-re kiterjedő általánosságban bevezetni $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$. Fontosabb és sürgősebb feladat az $n=2$ és az $n=1$ eset *szembe állítása*, mint annak a keresése, ami bennük *közös*. Olyan megkülönböztetésekre gondolok, mint „fia" és „fiú", „érettebb" és „érett", „látlak" és „látok". A függvény és a reláció kapcsolatainak felismertetése is későbbi feladat. Viszont külön-külön a *tulajdonság*, a *reláció* és a *függvény* már az általános iskola 1. osztályában megjelenik. Nem néven nevezve, hanem példákon, tevékenységeken át. *Tulajdonságok* szerint válogatunk szét különféle dolgokat valóságosan vagy jeleik útján (személyeket, tárgyakat, számokat stb.), kialakítva ezzel halmazok részhalmazait és kiegészítő halmazukat. *Relációkat* fejezünk ki rámutatással, kéz-

fogással, nyilak vagy összekötő vonalak húzásával, egy-egy halmazon belül vagy két-két halmaz elemei közt. *Függvényekkel* ismerkedünk gépjátékok útján, grafikonok építésével és több más módon. Azok a gyerekek, akik ebben a közegben nőnek fel, ugyanolyan könnyedséggel mozognak benne, mint anyanyelvük közegében: matematikai anyanyelvükké válik. Pedig az anyák — tanítóik — még csak törik, épphogy tanulgatják ezt a nyelvet. Egy nemzedékkel később minden könnyebb lesz. De csak akkor, ha ez a nemzedék is megteszi a magáét: eléri, hogy a leendő anyák a feje fölé nőjenek.

Kiegészítésül néhány megjegyzés.

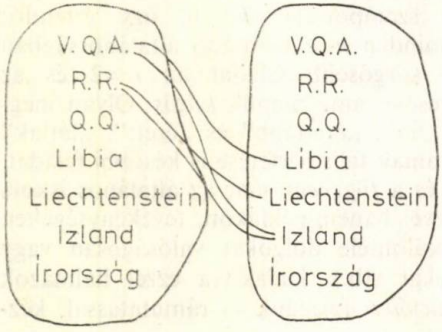
1. Pollák hivatkozik Csákány Béla *Algebra* című jegyzetére annak illusztrálására, hogy a külfölddel ellentétben Magyarországon inkább dívik a reláció szó szűkebb értelmű használata (az indulási és az érkezési halmaz megegyezik). Statisztikát nem készítettem, de kinyitottam Szendrei János kiváló *Algebra és számelmélet* című könyvét, és ott ezt olvastam: „A H és a K halmaz $H \times K$ Descartes-féle szorzatának bármely ϱ részhalmazát *H és K közötti (binér) relációnak* nevezzük".

2. Használjuk-e erre a *megfeleltetés* és csak a $H=K$ esetre a *reláció* szót (akár azonosítjuk a relációt a szorzathalmaz egy részhalmazával, akár csupán jellemezzük vele)? Néhány megfontolandó szempont:

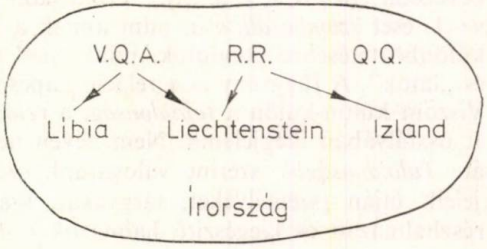
a) Nem árt, ha a magyar és a nemzetközi szóhasználat jól illeszkedik: egyrészt közelítőleg egy-egyértelműen felelnek meg egymásnak a szavak, másrészt sok köztük az alakilag egyező, alig eltérő vagy könnyen lefordítható ún. tükörszó. Ezzel szemben egyforma szavak eltérő értelemben való használata sok nehézség forrása.

b) Akik az új (1. osztállyal kezdődő) tantervet kidolgozták, azok a tágabb értelem mellett döntöttek (mégpedig abban a konkrétabb változatban, hogy a nyilak — vagy párok, általában a szorzathalmaz egy-egy részhalmaza — csak *jellemzik* a relációt, de nem azonosak vele). Ha voltak is ennek a döntésnek szubjektív elemei, ne változtassunk rajta, ha nem feltétlenül szükséges.

c) Ha a *megfeleltetés* szót szakkifejezés rangjára emeljük, akkor ezzel is nő a szakszavak száma. Pedig jelzős szerkezettel is különbséget tehetünk. Például a $H=K$ esetben egy halmazon belüli, H-beli relációról beszélhetünk. A jelzős szerkezet hosszabb ugyan, de elárulja, hogy szűkítésről van szó. Sokszor erre sincs szükség, mert az összefüggésből úgyis nyilvánvaló, tágabb vagy szűkebb értelemben használjuk-e a reláció szót. Például szimmetrikus (reflexív, tranzitív stb.) csak szűkebb értelemben vett reláció lehet, mint Pollák említi is. Ha jól értem, ő elsősorban a fogalmak tisztázását kéri számon, teljes joggal. A fogalmak tisztázása viszont lehetővé teszi a szóhasználat egyszerűsödését.



3. Egy egyszerű trükkel a $H \times K$-beli relációkat mind besorolhatjuk a $H \times H$-beliek közé és így rájuk szorítkozhatunk az általánosság csorbítása nélkül: H és K



unióját vesszük. Ez a trükk azonban pedagógiailag nem célszerű, bonyolít inkább, mint egyszerűsít. Ezt a *B)*-ben említett példával illusztráljuk. Akár kétszer rajzoljuk fel az uniót, akár csak egyszer (és akkor összekötő vonalak helyett nyilakat rajzolunk), erőszakoltnak tűnik a lehetséges párok halmazának ilyen kibővítése.

Miért keressük ki 49 lehetséges összekötő vonal közül a megfelelőket, ha eleve nem jöhet szóba több, mint 12? Elvont megfontolásokban lehet értelme annak, hogy ezen a módon visszavezessük a $H \times K$ esetet $(H \cup K) \times (H \cup K)$ útján a $H \times H$ esetre, de a fogalom érlelésének kezdeti szakaszán ezzel nem nyernénk. (Pollák ezt nem is javasolja, csak mint az ő álláspontját látszólag erősítő gondolatot kellett itt szóba hozni.)

4. A kétváltozós relációk és az egyváltozós függvények közti kapcsolatra több okból is érdemes rávilágítani. Egy ilyen ok: az ún. függvénytranszformációk az R^2-en (a valós számok halmazának önmagával vett Descartes-szorzatán) értelmezett relációk transzformációi közé sorolhatók speciális esetként. Vegyük az $x^2+y^2=1$ egyenlettel megadott kör eltolását az $(a; b)$ vektorral: az $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ egyenlettel megadott körhöz jutunk. Ez semmivel sem különbözik attól, ahogyan például az $y=x^2$ egyenlettel megadott parabolából kapjuk az $y-b=(x-a)^2$ vagy a vele ekvivalens $y=(x-a)^2+b$ egyenlettel megadott parabolát. Amikor ezeket a koordinátasíkon ábrázoljuk, kétváltozós logikai függvények igazságértékeinél tintázzuk be a papírt: az „igaz" jele itt a tinta színe, a „hamis" jele a papíré. Logika, geometria, algebra (egyenletmegoldás, ekvivalens egyenletek), függvények fogalomköre keveredik itt. Aki ezekben külön-külön szeret gondolkozni, az valóban keveredést lát; aki jobban kedveli a matematika egységét, az szintézist. Jó dolog valamikor a középiskola magasabb osztályaiban kialakítani (segíteni kialakulni) a tanulók matematikai fogalmaiban valami szintézist. Még jobb dolog 6 éves koruktól törődni azzal, hogy szintetikus szemléletük alakuljon ki.

5. Ha ilyen értelemben az egyváltozós függvények mégis a kétváltozós relációk speciális eseteinek bizonyulnak (grafikusan a koordinátasík olyan ponthalmazaival jellemezhetjük egy valós változó valós értékű függvényeit, amelyeknek az ordinátatengellyel párhuzamos minden egyenessel legfeljebb egy közös pontjuk van), akkor érdekes lehet további specializálással eljutni a leképezés, injekció, szürjekció (vagy szuperjekció) és bijekció fogalmához is. Ha nem szorítkozunk csak R^2-re, akkor a következő áttekintést adhatjuk ezekről a fogalmakról:

A binér relációk két halmaz Descartes-szorzatának részhalmazai (vagy velük jellemezhetők; az alábbiak szempontjából ez nem lényeges). A Descartes-szorzat elemei — mint tudjuk — olyan rendezett párok, amelyeknek az 1. eleme az 1. halmazból, 2. eleme a 2. halmazból való. A fent felsorolt fogalmakhoz úgy juthatunk el ebből, hogy különféle megszorításokat teszünk a halmazokban előforduló párokra. Az alábbi típusú megszorításokról lesz szó:

	Kikötjük-e az 1. halmazról,	Kikötjük-e a 2. halmazról,
hogy *legalább* egy párban előfordul minden eleme?		
hogy *legfeljebb* egy párban fordul elő minden eleme?		

Mind a négy mezőbe „igen" és „nem" válasz közül bármelyik kerülhetne. Így az általános esetnek (négy *nem* válasz) 15 speciális esetéhez jutnánk. De ez nem mind érdekes. A következők érdekesek köztük:

RELÁCIÓ:

	1. halmaz	2. halmaz
$\geqq 1$?	nem	nem
$\leqq 1$?	nem	nem

FÜGGVÉNY:

	1. halmaz	2. halmaz
$\geqq 1$?	nem	nem
$\leqq 1$?	igen	nem

LEKÉPEZÉS (APPLIKÁCIÓ):

	1. halmaz	2. halmaz
$\geqq 1$?	igen	nem
$\leqq 1$?	igen	nem

INJEKCIÓ:

	1. halmaz	2. halmaz
$\geqq 1$?	igen	igen
$\leqq 1$?	igen	nem

SZÜRJEKCIÓ (SZUPERJEKCIÓ):

	1. halmaz	2. halmaz
$\geqq 1$?	igen	nem
$\leqq 1$?	igen	igen

BIJEKCIÓ:

	1. halmaz	2. halmaz
$\geqq 1$?	igen	igen
$\leqq 1$?	igen	igen

Az applikációknak ez a definíciója a szakirodalomban egyöntetű. A függvényeket van aki azonosítja az applikációkkal, van aki más szempontból különbözteti meg tőlük. De meglehetősen elterjedt az a megkülönböztetés közöttük, amit a táblázat fejez ki, és ami a fenti *H)* állásponttal van összhangban.

Eszerint a *szóbajöhető* bemenő adatok halmaza éppúgy lehet bővebb a *valóban* bemenő adatok halmazánál (az értelmezési tartománynál), ahogy a *szóba jöhető* kijövő adatoké is a *valóban* kijövőeknél (az értékkészletnél). Ha ezt a definíciót fogadjuk el, akkor például az $x \mapsto 1/x$ vagy az $x \mapsto \sqrt{x^5 - 3x^2 + 5x - 1}$ függvényről úgy is beszélhetünk a valós számok halmazán, hogy nem vizsgáljuk, pontosan mely valós számokon vannak értelmezve. Csak az applikációkról kötjük ki, hogy az indulási halmaz minden elemén értelmezve legyenek. Közülük a szürjekcióktól azt is megkívánjuk, hogy az érkezési halmaz minden eleméhez jussanak el legalább egyszer, de akár többször is. Az injekciók nem kell, hogy minden elemhez eljussanak, de egynél többször nem juthatnak el egyikhez sem. Végül a bijekciókban pontosan egyszer szerepel nemcsak az indulási halmaz minden eleme (mint minden applikációban), hanem az érkezési halmaz minden eleme is.

OLÁHNÉ DR. ERDÉLYI MÁRIA
egyetemi adjunktus, Debrecen

Az 1777-es Ratio Educationis

1777 jelentős dátum a magyar oktatásügy történetében. Az ekkor megjelent és 1806-ig érvényben levő Ratio Educationis kiterjedten rendelkezett a különböző népiskola típusok, a három évfolyamú grammatikai iskola, a két évfolyamú „humán" tárgyak osztálya, valamint az ugyancsak kétéves filozófiai tanfolyam[1] oktatását, továbbá az akadémiai és egyetemi képzést illetően. Mivel az ezt a törvényt felváltó — lényegében a 19. század közepéig érvényben levő — II. Ratio Educationis sok tekintetben elődjének a nyomdokain járt, így *az 1777-es Ratio Educationis szellemében, leglényegesebb előírásait tekintve hosszú időn keresztül meghatározta a magyar oktatásügyet.*[2] Ez ok miatt, valamint a *200 éves évforduló* kapcsán nem érdektelen foglalkoznunk az 1777-es Ratio Educationis-szal, illetve ennek a matematikaoktatásra vonatkozó előírásaival, továbbá az előírások gyakorlati megvalósításával.

Az 1777-es Ratio Educationis matematikaoktatásra vonatkozó előírása első látásra igen szerénynek tűnik. Különösen így látjuk akkor, ha a filozófiai osztályokat már a felsőoktatáshoz tartozóknak tekintjük, amint azt sok esetben tették is e korszak értékelői. Viszont ennek helyes volta kérdéses, ha figyelembe vesszük azt, hogy a filozófiai tanfolyamot minden olyan diáknak el kellett végezni, aki felsőfokú szakképzésben kívánt részt venni. A matematikaoktatás szerény voltáról megváltozik a véleményünk, ha néhány dolgot figyelembe veszünk. *A grammatikai és a „humán" tárgyak osztályait, valamint a filozófiai tanfolyamot együtt vizsgálva a számtan, illetve a matematika az egyes tantárgyak összóraszámát tekintve*[3] *a második helyen állt* (megelőzte pl. a történelmet és a vallást). Az igazsághoz tartozik természetesen az is, hogy az első és a második hely között — óraszám tekintetében — igen nagy volt a különbség. Míg a már említett összóraszám a latinnál 57, addig a matematikánál 18,5 volt. De nemcsak az óraszám szerinti helyezés, hanem a tananyag is a matematikai ismeretek megbecsülésére mutat.

A *népiskola* minden típusánál (falusi, kisebb városi, nagyobb városi és elsőrendű) a tanítandó tantárgyak felsorolásában az elsők között

[1] A filozófiai osztályok az akadémiákhoz tartoztak. Azok, akik a filozófiai tanfolyam elvégzése után még további tudományos vagy szakképzésre törekedtek, az egyetemen, illetve az akadémiákon tanulhattak tovább.

[2] A protestáns iskolák önrendelkezési jogukra hivatkozva nem fogadták el sem az 1777-es, sem az 1806-os Ratio Educationis-t. A protestáns felekezetek — tekintetbe véve a Ratio Educationis előírásait is — önmaguk alkottak iskoláik számára törvényeket. (A protestáns iskolák Ratiok korabeli matematikaoktatásával részletesen foglalkozik a szerzőnek a Magyar Pedagógiá-ban (1976/3) megjelent dolgozata.)

[3] A filozófiai tanfolyamon szereplő alkalmazott matematika óraszámait is számítva. A tárgyalt kor sajátossága volt, hogy megkezdődött a matematika szétválása „tiszta" és „alkalmazott" matematikára. Alkalmazott matematikából az 1777-es Ratio Educationis a geodéziának, a hidrotechnikának, az építészetnek „s más efféléknek" a tanítását írta elő.

találjuk a számtant, amelynél az előírt legbővebb tananyagban a négy alapművelet, a hármasszabály és a társaságszabály, továbbá ezek alkalmazása szerepel. A népiskola típusa határozta azt meg, hogy az előbb felsorolt anyagból mit vettek, illetve milyen területre (mezőgazdálkodás, kézműipar vagy kereskedelem) alkalmazták. A városi iskolák azon tanulói esetében, akik majd valamilyen mesterséget szándékoztak folytatni — a jövendő életpálya szükségleteinek megfelelően — már a mértan elemeinek tanításáról is történt rendelkezés.

A *grammatikai iskola* matematikai tananyaga a négy alapművelet gyakorlása, a „törtszámok kezelése, az aranyszabály, az arányok, a haladványok" és ezek alkalmazása volt. Ebben az iskolatípusban előírták még a geometria tanítását az arra érdemes olyan ifjak számára, akik „a grammatika végeztével az iskolának búcsút mondanak".

A *„humán" tárgyak osztályai*ban — a grammatikai iskolában tanított anyag ismétlésére szánt első hat hónap után — a „tiszta mennyiségtan elemei"-nek a tanítását írták elő az új megjelenő „iskolakönyv", illetve átmenetileg Büsch könyvének alapján.

A *filozófiai tanfolyamon* a „tiszta matematika" tananyaga az előírt tankönyv alapján a következő volt: Hatványozás, gyökvonás, algebrai kifejezések és a velük végzett műveletek. Az első- és a másodfokú algebrai egyenletek megoldása. Egyenletrendszerek tárgyalása. Arány és aránypár, számtani és mértani sorozat, logaritmus. Síkgeometriai tételek bizonyítása, szerkesztési feladatok. Egybevágó és hasonló síkidomok. Területátalakítások, trigonometriai ismeretek, testmértan. (Az 1793-as és a későbbi kiadású könyvekben már a tizedes törtek és az analitikus geometria elemei is megtalálhatók.)

A fentiekben ismertetett tananyag csak a címszavakat tekintve — napjaink matematikaoktatásához viszonyítva is — igen jelentősnek mondható. Az igaz, hogy ennek a tananyagnak a nagy része a filozófiai tanfolyamon került tanításra, de — amint már említettük — a filozófiai tanfolyamot mindenkinek, aki felsőfokú szakképzésben részt kívánt venni, el kellett végezni. Tehát pl. egy olyan valaki is, aki ugyan nem reáltudományokkal kapcsolatos életpályát választott (pl. egy pap vagy egy jogász) — az előírt tananyagnak csak a címszavait tekintve —, napjaink matematikai képzéséhez hasonlóban részesült. E tények azt mutatják, hogy *a matematikai ismeretek oktatásának jelentős szerepet szántak a tanterv készítői.* Ez nyilván nem véletlen, hanem a felismert gazdasági és társadalmi szükségszerűség következménye volt.

Az előírt tankönyveket vizsgálva néhány észrevétel azonnal adódik a tananyagot, illetve annak feldolgozási módszerét illetően. A tananyag egyes részei a tárgyalás során különböző súllyal szerepeltek. *Kiemelt szerepet kapott az arány, aránypár és ezek alkalmazása.* Ezek az ismeretek nemcsak a gyakorlati alkalmazások szempontjából, hanem a matematikán belüli felhasználásuk révén is jelentős hangsúlyt kaptak. (Pl. a filozófiai osztályok tankönyve a geometriai sor összegképletének levezetésénél is aránypárokra vonatkozó ismeretet használ fel.) Elméletileg is részletesebben tárgyalták az aránypárok témakörét a Ratiok korában, mint napjainkban. De e témakör tárgyalása már a grammatikai és a „humán" tárgyak osztályában is szerepelt, sőt már a népiskolai tanulmányokban is. Nagyon sok gyakorlati feladat megoldásánál az aránypárokat használták. A grammatikai és a „humán" tárgyak osztályának tankönyvében a II. és III. kötet anyaga jelentős részben az aránypárok gyakorlati alkalmazása.

A népiskolai, a grammatikai és a „humán" tárgyak osztályainak tankönyveiben — a tanterv előírásainak megfelelően — lényegében igen szerény anyag található. A nem negatív egész és törtszámokkal végzett alapműveletek, valamint az akkori társadalmi gyakorlatnak megfelelő számítási eljárások szerepelnek elsősorban e tankönyvekben. A negatív mennyiségekkel és a velük végzett műveletek szabályaival a filozófiai osztályok tankönyvében találkozunk. Ugyanezen tankönyvben kerültek bevezetésre — a négyzetgyökvonással kapcsolatosan — az irracionális számok, és megjegyzésként már utalás történik a képzetes számokra is. Tehát a *valós számkör* minden száma bevezetésre került a filozófiai osztályokig bezárólag, sőt még a komplex számok irányába is történt utalás. Azonban a filozófiai osztályok tankönyvében szereplő kidolgozott feladatok megoldásánál — a gyökvonásos feladatoktól eltekintve — általában csak a népiskolában már megismert számokra volt szükség. A *logaritmus* fogalma a filozófiai osztályokban került bevezetésre. A logaritmussal való számolás szabályai, a logaritmustábla készítésére való utalás után interpolálás, valamint a tábla használata szerepel az előírt tankönyvben. Az is látszik a tankönyvből, hogy a tárgyalás elsősorban a logaritmusra vonatkozó ismeretek közlésére korlátozódott, a logaritmus alkalmazása nem szőtte át a tananyagot. A logaritmus tárgyalásánál, valamint a gyökvonásos feladatoknál a tankönyv szerzője használta a *tizedes törteket*, amelynek a tárgyalása a későbbi kiadású, átdolgozott tankönyvekben már önálló fejezet volt.

A filozófiai osztályok tankönyvének első kötete *algebra*, a második *geometria*. Az algebra kötet jelentős része az *egyenletek és egyenletrendszerek* tárgyalása, amelyre a szükséges számítási eljárások megadása után kerül sor. A könyvben határozottan látszik az egyenleteknek a mindennapi élettel, a problémákkal való kapcsolata. „Quaelibet aequatio nascitur ex aliquo problemate." A tankönyvben található,

egyenletekre vonatkozó példák általában szöveges feladatok. Helyeselhető még az is, hogy a határozatlan egyenletekkel is foglalkozik a tankönyv, és több ilyen típusú kidolgozott feladat is található benne. Viszont hiba a másodfokú egyenletek tárgyalásánál az, hogy mindig csak egy gyök szerepel a könyvben található megoldott feladatoknál.

Igen jelentős geometriai anyag található e tankönyv II. részében az *„Elementa geometriae purae"*-ban. A geometriai részben nagyrészt azok az ismeretek szerepelnek, amelyek a későbbi iskolai anyagban is helyet kaptak. Először *sík-*, majd *térgeometriával* foglalkozik a tankönyv. A síkgeometriai anyagrészben geometriai szerkesztési feladatok is vannak, továbbá szerepelnek az egyszerűbb síkidomok területszámítási képletei is (bizonyítással együtt). Térgeometriából elsősorban a testekkel, azok felszínének és térfogatának kiszámításával foglalkozik a tankönyv. E képletek levezetésénél egyes esetekben azzal az eljárással találkozunk, amely gondolatilag hasonló ahhoz, amelyet napjainkban „burkolt integrálszámítás" megjelöléssel emlegetünk. Ezekre a túlzottan tömör tárgyalásmód a jellemző. Például a gúla köbtartalmának kiszámítására vonatkozó képlet levezetésénél minden rajz, jelölés, képlet nélkül csak szavakban elmondva — és közben hivatkozva az algebrai és geometriai részben már bizonyított tételekre — történik az állítás igazolása. A síkgeometriai anyagrészbe beépítve kerül sor a *trigonometriai* ismeretek tárgyalására. A tankönyv tárgyalása azonban még sok tekintetben nem zárkózott fel Euler — ekkor már ismert — bevezetett jelöléseihez, értelmezéséhez.

Mit mondhatunk a fentiekben ismertetett tananyag *tárgyalásmódjáról*? Bár a definíció szóval egyik iskolatípus tankönyvében sem találkozunk, mégis még a népiskolai tankönyv is minden felhasznált fogalmat — az első megjelenésekor — meghatároz, megmagyaráz. A népiskolai, a grammatikai és a „humán" tárgyak osztályainak tankönyveiben nincsenek kiemelve a tételek, a filozófiai osztályok tankönyvében viszont tételek, azok bizonyítása valamint „corollárium"-ok találhatók. Axiómák megadásával csak a filozófiai osztály tankönyvének geometriai részében találkozunk. Az alsóbb iskolák tankönyvei kérdés-feleletes feldolgozásúak, amelyek mellett még megjegyzések és kidolgozott feladatok vannak. A feladatok a filozófiai osztályok tankönyvében sokszor problémaként szerepelnek. Értékesek e tankönyvnél a megjegyzésben közölt — összefüggésekre, további eredményekre történő — utalások. Sajnos, az alsóbb iskolák tankönyveiben elég sokszor pontokba szedett szabályokkal találkozunk. Szólnunk kell még a matematikai tankönyvek *kifejezésmód*járól is. Amint tudjuk, a matematika sajátos szimbolikus nyelvet használ, vagyis fogalmait betűkkel, jelekkel, tételeit pedig képletekkel fejezi ki. Ez a kifejezésmód (formanyelv) a Ratiók korabeli matematikai tankönyvekben még nagyon kezdetleges. Az anyag tárgyalására inkább a szöveg a jellemző, vagyis a meghatározások, tételek szóban vannak kimondva. Ez annyira jellemző a könyv tárgyalásmódjára, hogy például ha egy latinul nem tudó személy találomra felnyit egy Ratiók korabeli matematika tankönyvet, nem biztos, hogy felismeri a témakört.

Bár az 1777-es Ratio Educationis az egyes tantárgyak oktatásával kapcsolatban nem határozta meg az *oktatási és nevelési célt*, mégis lehet e téren is sok mindent sejteni. A grammatikai osztályoknál a *mindenkire nézve szükséges tantárgyak* csoportjában az elsők között van említve a számtan. A „humán" tárgyak osztályaiban szintén a *fő és szükséges tantárgyak* között szerepel „a számtan és a mennyiségtan elemei"[4] A fentmaradt dokumentumokból nyilvánvalóan látszik, hogy az alsóbb osztályok tanításában törődtek is a *gyakorlati alkalmazásokkal*, a matematika hasznának a megmutatásával. A filozófiai osztályokban a matematika alkalmazása a — matematika részeként tanított — *„mathesis adplicata"*-ban került bemutatásra. Figyelmes vizsgálat után azonban az is nyilvánvaló lesz, hogy *a hasznosság mellett még más nevelői értéket is láttak a matematikai ismeretek tanításában.* Az előző századok számtan oktatására az volt a jellemző, hogy a tanítás során ismereteket közöltek, alkalmazandó szabályokat adtak. A 18. században viszont már igen sok országban arra törekedtek, hogy a tanítás által a tanulók szellemi erőit is fejlesszék. Olyan matematikai oktatást akartak megvalósítani, amely már nem elégszik meg a műveletek gépies végzésével, hanem minden egyes lépés megértését, indoklását is megköveteli. Egyre inkább előtérbe lépett az a nézet, hogy a matematikaoktatás kiválóan alkalmas az értelem fejlesztésére, a *logikus gondolkodásra nevelés*re. Szállóigévé vált az az 1748-ban megjelent „Arithmeticá"-ban szereplő megállapítás, hogy „a számtan az ész köszörűköve." Az 1777-ben kiadott Ratio Educationis-ban is megtalálható már a tanítandó anyag megértését, a számítási eljárások indoklását is követelő tanítás bevezetésére irányuló törekvés. Ezt az állítást igazolja például a törvénynek az a kívánalma, hogy a tankönyvekben a szokásos szabályok és eljárások mellett a pontos meghatározások és a szabályok levezetései is szerepeljenek.

Előírt követelmény volt még a *gyakori ismétlés* is. „Sokszoros tapasztalat tanít rá, hogy semmi sem esik ki oly gyorsan emlékezetünkből, mint a számtan, ha a szabályokat kellően meg nem értettük és ha alkalmazásukban folytonos gyakorlat által nem tökéletesedtünk."[4] Ezért

[4] Az 1777-i Ratio Educationis, 1913, 143. oldal.

igen alapos gondot fordítottak a tanterv és a tankönyvek készítői az ismétlésre, sőt mondhatjuk azt, hogy e téren túlzásokba is estek. Ezt nemcsak ma, az idők távlatában látjuk így, hanem már a *korabeli kritika* is szóvá tette azt, hogy feleslegesen sok a négyszeri ismétlés az alapműveletek tanításánál.

Meg kell még vizsgálnunk a teljesség kedvéért az 1777-es Ratio Educationisnak a *módszertani segédeszközökre* vonatkozó előírásait.

A törvény egységesítő törekvése a *tankönyv* használatában is érvényesült. Az Egyetemi Nyomda kizárólagos jogot élvezett az iskolai tankönyvek kiadására. Minden iskolatípus esetében elő voltak írva a megfelelő tankönyvek, amelyeket a korabeli iratok tanúsága szerint használtak is. A tanárok mindenesetre használták e tankönyveket, a végzett anyagot is leginkább a tankönyv adatai alapján adták meg. A diákok tankönyvhasználatánál viszont már voltak problémák. A nyilván fennálló anyagi okok mellett valószínűleg az is közrejátszott ebben, hogy a diákok nem igen tudtak tanulni a tankönyvekből, példatárként pedig nem voltak használhatók, mivel kevés és nagyrészt kidolgozott feladatokat tartalmaztak. Önkéntelenül felvetődik a kérdés, hogy ilyen körülmények között miből tanultak a diákok. A válasz erre — a korabeli iratok tanúsága szerint — az, hogy az órákon jegyzeteltek, diktált szöveget írtak, könyveket, jegyzeteket másoltak, sőt egymás jegyzeteit is megvették.

Az 1777-es Ratio Educationis rendelkezett az *iskolai könyvtárak* felállításáról (még a grammatikai iskolák esetében) is. A fentmaradt levéltári anyagban bőven találunk matematikai szakkönyveket kérő iratokat, valamint olyan iskolai leltárakat, amelyek matematikai könyvek létét tanúsítják. Más matematikaoktatási segédeszközök beszerzésére vonatkozó kérelmek is bőségesen találhatók a korabeli levéltári anyagban. Ezek a kérelmek *mérő-, szerkesztő-, valamint szemléltető eszközök* beszerzésére irányultak. De nemcsak kérelmek, hanem ilyen eszközök beszerzését tanúsító számlák, valamint meglevő eszközökről készített leltárak is maradtak fenn, tanúsítva azt, hogy már a Ratiók korában is voltak olyan pedagógusok, akik a matematikai ismeretek oktatása közben alkalmazták a mérést, a szemléltetést, valamint a szerkesztést.

Az oktatásügy minden komoly reformja az iskolákban tanító *pedagógusokon* áll vagy bukik. Az 1777-es Ratio Educationis szerkesztői is tudták ezt. Ezért foglalkozik e tanterv külön kiemelten az elsőrendű nép-, azaz *normaiskolá*val. „Ebben nemcsak a gyermekeknek kell teljesebb és bővebb oktatásban részesülniök, mint a többiekben, hanem maguknak a tanítóknak is, hogy hivatásuk teljesítésében gyakorlatot szerezzenek."[5] De a törvény szerkesztői nemcsak a népiskolák, hanem a magasabb osztályok tanítóira és tanáraira is gondoltak. Bár a felsőbb iskolatípusok pedagógusainak képzésénél a szerzetesrendekre kívántak támaszkodni, azért néhány utalás *(repetensek kollégiuma, „concursus"*[6]*, próbaév)* velük kapcsolatban is található e törvényben.

A fennmaradt levéltári anyag alapján e kérdéskörrel kapcsolatosan feltétlenül részletesebben kell foglalkoznunk a tanítók, illetve a tanítójelöltek normaiskolai képzéséről számot adó jelentésekkel, a „concursus"-ok anyagával, továbbá a különböző iskolatípusok tanítóiról és tanárairól készített jelentésekkel.

A normaiskolai képzésben résztvevő tanítókról és tanítójelöltekről készített jelentésekben a személyi adatok mellett osztályzatok is vannak. *A tanítás módszertana és az aritmetika mindig vizsgatárgy volt.* Ez azt mutatja, hogy lényegesnek tartották a matematikai ismereteket, a biztos tudást e tárgyból. Más kérdés az, hogy nem minden tanító vett részt ilyen képzésben, és az, hogy ez a féléves, sőt sok esetben még annál is rövidebb idő nem volt elegendő a szükséges ismeretek elsajátítására.

A grammatikai és a „humán" tárgyak osztályaiban, valamint a filozófiai tanfolyamon megürült katedrák betöltésére meghirdetett *„concursus"-t* — amely tulajdonképpen versenyvizsgát jelentett vagy legalábbis kellett volna jelentenie — *az illetékes tankerületi székhelyen, illetve az egyetemen tartották meg.* A jelentkező jelöltek a bizottság előtt *írásbeli és szóbeli vizsgát* tettek. A filozófiai tanfolyamot nem számítva, az írásbeli kérdések nem matematikai tárgyúak voltak. A szóbeli vizsgán pedig a követelmény a matematikai ismeretből leginkább csak a tanítandó anyag témakörében mozgó ismeret számonkérésére korlátozódott. A pályázók rangsorolásánál, elbírálásánál nem a — vizsgán is általában az utolsók között szereplő — matematikai ismeretből adott felelet volt a döntő. A filozófiai tanfolyamon már szaktanári rendszer volt, és az itt megürült katedrákra pályázók már írásbeli és szóbeli vizsgát egyaránt tettek matematikából. A követelmény viszont általában szintén csak a tanítandó anyag témakörében mozgott.

A különböző iskolatípusok pedagógusairól félévenként felterjesztett jelentésekből iskolai végzettségükről és tanításukról nyerünk információt. Végzettségük igen változatos képet mutatott. Míg még a népiskolai tanítók között is voltak olyanok, akik akadémiai tanulmányokat is folytattak, addig nagyon sok volt az olyan pedagógus is, akik mindössze azt az iskolát végezték el, ahol tanítottak. Viszont

[5] 4. számú jegyzet 66. oldal.

[6] A későbbi magyar nyelvű iratokban „csődület", majd „Csőd" elnevezéssel jelölték e vizsgákat.

igen kedvező volt az e korban tanító pedagógusok idegen nyelvi ismerete. A tanítók, tanárok emberi tulajdonságaira, tanításuk módjára adott válaszok általában elég jók. Sajnos, azonban ezekből a tanítás egészét érintő válaszokból nem derül ki az, hogy az illető pedagógus hogyan tanította a matematikai ismereteket. Nemcsak a népiskolákban, hanem még a grammatikai osztályokban is egy pedagógus tanított minden tantárgyat, a „humán" tárgyak osztályában pedig legjobb esetben a tantárgyak felét. Márpedig az elképzelhetetlen, hogy valaki egy sereg tudományhoz magas szinten értett.

Az osztálytanítói rendszernek, a pedagógusok alacsony színvonalú képzettségének a kárát elsősorban nyilván a matematikai ismeretek, valamint a természettudományok tanítása vallotta. Az osztálytanítói rendszer, valamint az a tény, hogy a tanulókat csak a filozófiai osztályokban kellett tantárgyanként osztályozni, azt eredményezte, hogy a matematikai ismeretekből a követelmény általában alacsony színvonalú volt. E tárgy nem kapta meg még azt a megbecsülést sem a grammatikai és a „humán" tárgyak osztályaiban, amit a tanterv készítői szántak neki. Ezt az állítást tanúsítja például az is, hogy az e korból származó iskolai értesítőkben, fennmaradt jelentésekben a matematikai ismeretek általában az utolsók között szerepelnek ez osztályokban. A filozófiai osztályokban pedig a már említett túlméretezettség következményeként a megtanított ismeretanyag nem volt eléggé élő és ható. Nem valószínű az, hogy a filozófiai tanfolyamon a diákok megfelelően el tudták sajátítani az előírt jelentős tananyagot egy, illetve két félév alatt. Az egyenlőtlen tananyag-elosztás oka elsősorban a latin nyelvű oktatásban keresendő, ugyanis jól kellett tudni a latin nyelvet ahhoz, hogy valaki az eléggé elvont matematikai ismereteket megértse latinul. Nyilván ez is közrejátszott abban, hogy a grammatikai és a „humán" tárgyak osztályaiban a matematikai ismeretekből viszonylag szerény rész szerepelt.

Ahhoz képest, hogy az 1777-es Ratio Educationis volt az első jelentős oktatási törvény, eléggé kiterjedten figyelembe vette a kor nevelési és oktatási kérdéseit. E dokumentum szerzői gondoltak a *tehetséges diákokra* is. A rendes évvégi vizsgák mellett rendelkeztek a néhány kiváló tanuló részvételével tartott ünnepélyes vizsgákról is. Különösen jelentősek voltak a filozófiai osztályokban tartott ilyen jellegű vizsgák. Itt ugyanis már tantárgyanként jelentkeztek a tanulók e — a korabeli latin szóhasználatban *„tentamen publicum"*-nak nevezett — vizsgákra. A szaktanárok előadásai alapján összeállított vizsgaanyagot kinyomattatta vagy legalábbis kézzel leírta a „tentamen publicum"-okra egy-egy osztályból jelentkezett néhány diák. Ezek a 8—12 oldalas — levéltárainkban, könyvtárainkban elszórtan, de összességében szép számban található — kis füzetek értékes dokumentumai a Ratiók korabeli matematikaoktatásnak. Egy-egy ilyen kis füzet tulajdonképpen tananyag-összefoglaló volt, amelyeknek a többi tanulók is hasznát vehették a vizsgákra való felkészülésnél. A matematikából tartott „tentamen publicum"-ok nyilván jelentősek voltak a matematika iránt érdeklődő tanulók felkutatása, foglalkoztatása és ösztönzése szempontjából.

Összefoglalva, megállapítható az, hogy az 1777-es Ratio Educationis szerzői — amint már szó volt róla — összességében komoly, az akkori matematikatudomány állásához még szorosan kapcsolódó tananyagot írtak elő. További érdemként még azt is el kell ismernünk, hogy sok más, az oktatási munkát jelentősen befolyásoló kérdésben (például könyvtár, szertár, pedagógusok, tehetséges tanulókkal való törődés) is rendelkeztek e 200 évvel ezelőtt megjelent dokumentum szerzői. Mai szemmel nézve kétségtelenül vannak hiányai is e törvénynek. Azonban a hiányosságok felvetésénél feltétlenül figyelembe kell vennünk egyrészt azt, hogy az 1777-es Ratio Educationis volt az első jelentős oktatási törvény Magyarországon, másrészt pedig azt, hogy az iskolák nagy részénél még a szereplő előírások megvalósítása is komoly erőfeszítést kívánt, illetve kívánt volna. Az 1777-es Ratio Educationis-nak, valamint megvalósításának elemzésénél feltétlenül értékelnünk kell azt a tényt is, hogy e törvény kapcsán sok olyan probléma felszínre jött, amelyeknek a megoldása csak a későbbi időkben sikerült. Például a magyar nyelvű matematikaoktatásra vonatkozó rendelet 1844-ben jelent meg[7]. De utalhatunk az egyenletesebb tananyag-elosztással, a tantárgyankénti osztályozással, a pedagógusképzéssel és a matematikatanítás módszertanával kapcsolatos problémákra. Ezek mind olyanok voltak, amelyeknek a felismerése és megoldása az eredményesebb matematikaoktatás szükséges feltételei közé tartozott.

[7] A népiskolákban kezdettől anyanyelven folyt a tanítás. Az előírt magyar nyelvű népiskolai számtankönyv az 1777-es Ratio Educationis-t követően hamarosan meg is jelent.

MOLNÁR ZOLTÁNNÉ
főiskolai adjunktus, Nyíregyháza

Matematika felvételi tanító szakon

A nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán az idei felvételi vizsgák alkalmával is — az előző évben Nyíregyházán és Szombathelyen megkezdett felvételi kísérlet szerint — matematika volt a tanítói pályára készülők egyik felvételi tantárgya. Az ország többi tanítóképzőjében a megszokott rendszer szerint magyarból és történelemből kellett a jelentkezőknek felvételizniük. A felvételi tantárgyak ezen megválasztása azt a régi, de társadalmunkban még ma is élő szemléletet igazolja, hogy a tanítónak humán érdeklődésű embernek kell lennie. Kétségtelen, hogy a magyar—matematika felvételi sokoldalúbb ember iránti kívánalmat sejtet, de ez felel meg a tanítóval szemben jelenleg támasztott valóságos társadalmi követelménynek.

Az általános iskola alsó tagozatának ideiglenes matematika-tanterve a tanítótól biztos matematikai ismereteket, matematikus szemléletet, gondolkodást igényel. Hallgatóink többsége azonban igen alacsony színvonalú, — átlagban közepes alatti — matematikatudással kerül a tanítóképzőbe, sok esetben olyan alapvető hiányosságokkal, amelyek már alig pótolhatók. A fiatalok pályaválasztásánál igen mérlegelt szempont a felvételi vizsga tantárgya. A tanítónak jelentkezők az egyértelműen humán jellegű képzettséget igénylő felvételi vizsga mögött nem látják az igényes matematikai és természettudományos ismeretek szükségességét, s így tanulmányaik során sokszor becsapottnak érzik magukat. Hallgatóink közt alig akad olyan, aki szereti a matematikát, a hallgatóság zöme a középiskolák azon tanulói közül való, akik a 12 évi matematikatanulás során elidegenedtek a matematikától, s abban a reményben jelentkeznek tanítónak, hogy többet nem kell matematikával foglalkozniuk. (Elhangzott olyan szélsőséges vélemény is végzős hallgatótól, hogy minden tantárgyat szívesen tanítana, csak a matematikát nem.) Hogyan lesznek képesek az ilyen tanítók megszerettetni a matematikát a 6—10 éves gyerekekkel? Ezért tartjuk indokoltnak, hogy a tanítójelöltek kiválogatásánál egyik szempont legyen annak eldöntése, alkalmasak-e további három évi matematikatanulás után a modern matematika alapjainak korszerű módon való oktatására.

A kísérleti matematika felvételi a „Magyar felsőoktatási intézmények"-ről kiadott tájékoztatóban nem szerepelt, ezért az elmúlt évben és az idén is még januárban írásban és személyesen is felkerestük a beiskolázási körzet iskoláit, hogy tájékoztassuk az érdeklődőket az új felvételi rendszerről. Az elmúlt évben még váratlanul érintette a jelentkezőket a matematika felvételi. Az idén már számítottak erre a lehetőségre, sőt voltak olyan tanulók is, akiknek az érdeklődését a matematika felvételi irányította a tanítói pálya felé. Ebben az évben 263 tanuló jelentkezett főiskolánk tanítói szakának 105 helyére, a jelentkezők száma nagyobb volt, mint a korábbi években.

A felvételizők hozott pontszámát matematikából a középiskola II., III. vagy IV. osztályában elért legjobb matematika jegy adta, amit nagyon liberálisnak érzek.

Azt akartuk ezzel elérni, hogy a gyengébb matematika jeggyel rendelkező tanulók a kísérlet miatt ne kerüljenek hátrányos helyzetbe. Írásbeli felvételi vizsga matematikából nem volt. Véleményem szerint érdemes lenne az írásbeli vizsga bevezetésén gondolkozni, mert így objektívabb értékelésre és nagyobb differenciálásra volna lehetőség.

A szóbeli felvételi vizsgán minden jelentkező 4 feladatból álló feladatsort kapott, ezen feladatok megoldásáról kellett — felkészülési idő után — számot adni. A feladatok megoldásához szükséges ismeretanyag lényegesen szűkebb volt a felsőoktatási intézményekről kiadott tájékoztatóban megjelölt matematikaanyagnál. Nem a középiskolai matematikaanyag tételes ismeretéről kívántunk elsősorban meggyőződni, inkább a jelentkező problémamegoldó, logikai, kombinatív képességeiről akartunk tájékozódni. A feladatok megoldásához vezető gondolatmenetet is részletesen kellett ismertetni, ugyanis a matematikatanításra való alkalmasság egyik fontos kritériuma a logikus gondolatmenet, a gondolatok értelmes, érthető megfogalmazása.

Tájékoztatásul két feladatcsoportot közlök.

I. *a)* Határozza meg az a és b értékét, ha:

$$(a-1)(b+2) = 0.$$

b) 8 éves koromban apám 31 éves volt, most pedig kétszer annyi, mint én. Hány éves vagyok most?

c) Ha egy szám 9-cel való osztásakor 1 a maradék, akkor mennyi a hárommal való osztás maradéka?

d) Képzeljen maga elé egy 3 dm élhosszúságú, feketére festett kockát!

1. Hány vágással lehet 1 dm élhosszúságú kockákra vágni? Hány ilyen kockát kapunk?

2. Hány kockának lesz 4, hánynak 3, hánynak 2, hánynak 1 befestett oldala? Hány kocka nem lesz befestve?

II. *a)* Az alábbi három állítás közül válasszon ki két olyant, hogy ha az egyik igaz, akkor a másik is igaz!

„Az adott négyszög derékszögű."

„Az adott négyszög négyzet."

„Az adott négyszög rombusz."

b) Ossza el a 45-öt 4 részre úgy, hogy ha az első részhez kettőt adunk, a másodikat kettővel csökkentjük, a harmadikat kettővel szorozzuk, a negyediket kettővel osztjuk, akkor egyenlő számokat kapunk!

c) Igazolja, hogy ha a tetszőleges egész szám, akkor a^2+a páros szám!

d) Egy dobozban egyforma méretű, 20—20 db fehér, piros, sárga és kék színű golyó van. Becsukott szemmel hány darabot kell kiemelni, hogy valamelyik színből biztosan legalább 10 db legyen kivéve?

A feleletek nyomán a jelentkezők felkészültsége általában gyengének mondható. Alapvető ismeretekben is sok hiányosság mutatkozott. Voltak olyan részfeladatok, amelyek egy-egy alapfogalom definiálását kívánták meg. Sok vizsgázó ezeket a fogalmakat (pl. hatvány, számtani, mértani sorozat, trapéz, paralelogramma, felszín, középpontosan szimmetrikus alakzat stb.) sem tudta felidézni. Nem tudtak kellő biztonsággal egyszerű egyenlőtlenséget megoldani. A logikai műveletekben való jártasságuk nem kielégítő. Sok esetben azért nem értették meg a feladat problémáját sem, mert az „és", „vagy" szavak jelentésével nincsenek tisztában. Nagy nehézséget okoz a „ha..., akkor..." alakú állítások megfordítása. Egyszerű állítások bizonyítására is képtelenek voltak a vizsgázók, általános módszerük a konkretizáció volt: 1-2 esetben kipróbálták, igaz-e az állítás, s ezzel bebizonyítottnak érezték azt. Térszemléletük fejletlen, egyszerű térbeli problémákat is igen nehezen tudnak elképzelni. A feladatok önálló megoldása általában nem sikerült, a feletek sok tanári segítséget igényeltek. Eredeti, ötletes gondolkodást sajnos kevés vizsgázó mutatott. A többség

gondolkodása lassú, nehézkes, színtelen. A matematika szaknyelvét szépen használó felelőt igen keveset lehetett találni.

A matematika ugyan a két felvételi tárgy egyike volt, a jelenlegi pontszám számítása mellett igen kis szerepet játszott a jelentkezők elbírálásánál. A jelölt hozott pontjainak számát 4 magyar (III. és IV. évvégi irodalom és nyelvtan) jegyből és 1 matematika jegyből határoztuk meg. A felvételin szerzett pontszámát pedig a magyar írásbeli érettségi-felvételi dolgozatra kapott 2 osztályzatból és az irodalom, illetve a matematika szóbeli feleletre kapott egy-egy jegyből számítottuk. Így a számításba jövő 9 jegyből csak 2-t adott a matematika. Ha valóban azt akarjuk, hogy a matematika beleszóljon a felvételekbe, akkor ezen a rendszeren változtatni kell.

Szükségesnek érezzük és szeretnénk, hogy a tanítószakra való matematika felvételi általános bevezetést nyerjen. Matematikaoktatásunk reformjának sikere az azt megvalósító pedagógusokon múlik. A nem megfelelő felkészültségű tanító egész életre kiható kárt okozhat a gyermekek képességeinek kibontakoztatásában. Reálisan gondolkodva nem remélhetjük a matematika felvételitől azt, hogy ezután azok a tanulók jelentkeznek tanítói pályára, akik a középiskolában matematikából a legkiválóbbak voltak. De azt feltétlenül elérnénk, hogy azok a fiatalok, akik hivatásuknak a tanítói pályát választják — a matematika felvételi tudatában — már középiskolás éveikben másképpen viszonyulnának a matematikához. Jobb hozzáállással, hosszabb távon, nagyobb szorgalommal hiányosságaik jó része pótolható lenne. Nem kevésbé lényeges, hogy a tanítói pályára így készülők tudatosan vállalják majd azt, hogy egész életükben azon is munkálkodnak, hogy lerakják a kisgyermekek matematikai műveltségének alapjait, megszerettetik velük ezt a fontos tantárgyat. Ennek a tudatos vállalásnak feltétlenül színvonalasabb munkában kell majd megnyilvánulnia.

Azok a tanító szakos hallgatók, akik már matematikából is felvételiztek, most fejezték be az első évet főiskolánkon. A felvételi kísérlet kihatását — úgy érzem — még nem lehet lemérni, ehhez hosszabb időre van szükség. Örvendetes változás tapasztalható azonban az utóbbi időben hallgatóinknál: javult a matematikához való viszonyuk. Ennek a folyamatnak sok tényezője van. Feltétlenül szerepet játszik az, hogy a gyakorló iskoláinkban most már csaknem minden osztályban komplex matematikát vagy az ideiglenes matematika-tantervet tanítják. A gyakorlatban ékesszólóan bebizonyosodik, hogy alapos matematikai, matematika tantárgypedagógiai felkészültség nélkül nem tudják megállni helyüket. Pozitívan hat a hallgatóságra az, hogy látják, ezekben az osztályokban — ahol jól képzett nevelő dolgozik a gyerekekkel — a matematika az egyik legkedveltebb tantárgy. De egészen biztos, az is rangot adott a tanító szakos hallgatók matematikatanulásának, hogy a matematika — hacsak kísérletképpen is — a felvételi tantárgyak egyike lett.

BEREZNAI GYULA
főiskolai tanár
Nyíregyháza, Tanárképző Főiskola

Újabb bizonyítás a számtani-mértani közép egyenlőtlenségre

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség bizonyítására sok eljárást ismerünk, de ezek többsége sokkal bonyolultabb annál, hogy valamelyiküket az iskolai matematika tanítása során bemutathatnánk. Talán éppen ez az oka annak, hogy az említett összefüggés bizonyítását kettőnél több adat esetén általában mellőz-

zük olyannyira, hogy általános iskolai tanáraink zöme sohasem gondolta végig főiskolai tanulmányai során ennek a fontos egyenlőtlenségnek egyetlen bizonyítását sem. Ennek a hiányosságnak a pótlására ismertetjük meg olvasóinkkal a számtani-mértani közép egyenlőtlenségnek egy maláj matematikustól, Kong-Ming Chongtól származó igen egyszerű, de teljes bizonyítását.

Azt akarjuk tehát bizonyítani, hogy nem negatív valós számok számtani közepe nem lehet kisebb ugyanezen számok mértani közepénél, és a két közép között az egyenlőség érvényes akkor és csakis akkor, ha az átlagolt számadatok mindannyian egyenlők.

A bizonyítást teljes indukcióval, $n-1$-ről n-re következtetve végezzük, mégpedig

$$A^n \geqq x_1 x_2 \cdots x_n$$

alakban, ahol A jelenti az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nem negatív valós számok számtani közepét, s amely a bizonyítandó állítással ekvivalens. Felhasználjuk közben azt a könnyen igazolható tényt is, hogy ha az adatok nem mind egyenlők, tehát

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$$

módon sorozatba rendezve $x_1 < x_n$ teljesül, akkor számtani közepükre

$$x_1 < A < x_n$$

szintén teljesül.

Mivel egyenlő adatok esetén a számtani és a mértani közép egyenlősége triviális, feltehetjük, hogy az adatok között van két különböző, tehát az előbbi feltételeknek eleget tevő sorozatba rendezés lehetséges. Ez esetben

$$A(x_1+x_n-A)-x_1x_n = (A-x_1)(x_n-A) > 0,$$

mert az előbbiek szerint mindkét tényező pozitív, tehát

$$x_1+x_n-A > \frac{x_1x_n}{A}.$$

Bizonyítandó állításunk $n=2$-re, mint az elemekből tudjuk, igaz. Legyen az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatok számtani közepe $A>0$, és tekintsük az $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, x_1+x_n-A nem negatív valós számok számtani közepét:

$$\frac{x_2+\cdots+x_{n-1}+x_1+x_n-A}{n-1} = \frac{nA-A}{n-1} = A.$$

Ez szintén A, tehát indukciós feltevésünk értelmében

$$A^{n-1} \geqq x_2x_3\cdots x_{n-1}(x_1+x_n-A) > x_2\cdots x_{n-1}\cdot\frac{x_1x_n}{A},$$

amiből állításunk már következik.

Bizonyításunk teljessé tételéhez még bizonyítanunk kell azt, hogy ha a számtani és mértani közép egyenlő, akkor egyenlő adatokat átlagoltunk. Ha ugyanis ez nem így volna, akkor az imént bizonyítottak értelmében a közepek is különböznének, ami feltevésünknek ellentmond.

Az ismertetett bizonyítás, egyszerűségénél fogva, a teljes indukciós bizonyítást ismerő középiskolás diákoknak is bemutatható.

VIGASSY LAJOS
középiskolai tanár, Budapest

A négyzetes gúláról

Adva van egy szabályos négyoldalú gúla az alapélével (a) és két szomszédos oldaléle szögével (β).

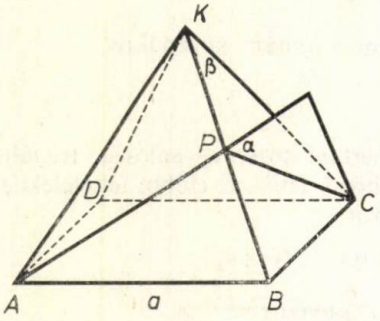
I. Számítsuk ki először a két szomszédos oldallap alkotta külső szöget, α-t. (1. és 2. ábra.)

Az AC átlóra illesszünk olyan síkot, amely merőleges a KB oldalélre. Ez lehetséges, mert AC merőleges KB-re.

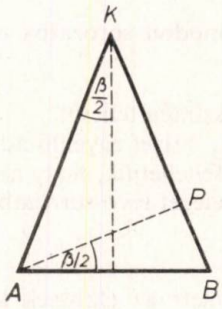
Az ACP egyenlő szárú háromszögből számítsuk ki α-t. A cosinustétel szerint:

$$AC^2 = AP^2 + CP^2 + 2 \cdot AP \cdot CP \cdot \cos\alpha.$$

Mivel $AC = a\sqrt{2}$ és $AP = CP = AB \cdot \cos\frac{\beta}{2}$, ezért



1. ábra



2. ábra

$$(a\sqrt{2})^2 = 2\left(a\cos\frac{\beta}{2}\right)^2 + 2\left(a\cos\frac{\beta}{2}\right)^2 \cos\alpha.$$

Innen

$$(1) \qquad \cos\alpha = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

Az (1)-ből következik, hogy ha α növekszik, akkor β fogy, és fordítva.

Most gúlánk magasságának egyenesén válasszunk ki egy K_1 csúcspontot tetszőlegesen. E gúla adatai legyenek α_1 és β_1. Ugyanezen magasság-egyenesen van valahol egy $K_2(\alpha_2, \beta_2)$ gúla-csúcspont is. Ezt azonban nem választhatjuk meg tetszőlegesen, mert azt akarjuk, hogy $\beta_2 = \alpha_1$ legyen. Mekkora e második gúlára nézve α_2?

Az (1) értelmében

$\cos\alpha_2 = \operatorname{tg}^2\frac{\beta_2}{2}$. Mivel pedig $\beta_2 = \alpha_1$, ezért írható:

$\cos\alpha_2 = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1}{2}$. Ámde ismert képlet: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, tehát

$\cos\alpha_2 = \frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1}$. Ekkor ismét (1) miatt

$\cos\alpha_2=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta_1}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta_1}{2}}$. Tudjuk azonban, hogy $\cos\beta_1=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta_1}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta_1}{2}}$, tehát

$\cos\alpha_2=\cos\beta_1$, vagyis $\alpha_2=\beta_1$.

Ez azt mondja ki, hogy *ha egy szabályos négyoldalú gúla élszögét és lapszögét felcseréljük, akkor újabb szabályos négyoldalú gúlát kapunk.* Ilyen módon a gúlákat párokba tudjuk foglalni.

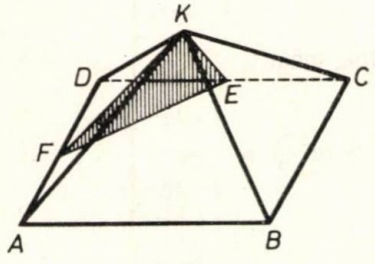
Példa. Két közös négyzet alapú gúlát fogunk tanulmányozni. Az egyiknek a magassága legyen az alapél fele, míg a másiknak a magassága legyen az alapátló fele. Az első gúla oldallapjai egy kocka átlós síkjaival párhuzamosak, míg a másik gúla egy szabályos oktaéder egyik felét alkotja.

Mivel ilyen különleges gúlákról van szó, ezért nem fogjuk felhasználni az (1) összefüggést, hanem a gúláknak különleges adatait aknázzuk ki (3. ábra).

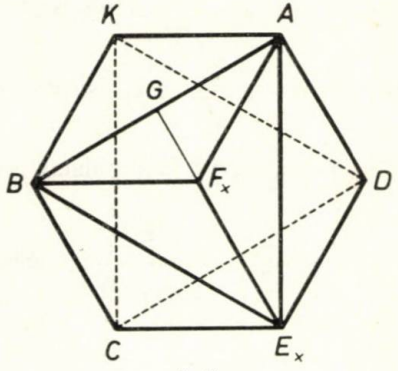
Az első gúlánál az ABK és BCK lapok szögét a K pontra illesztett normálisok szögével mérjük. Ezek KE és KF. A gúlának a kockával való rokonságából következik, hogy $KE=KF=EF=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. De akkor a KEF háromszög egyenlő oldalú, és így $\alpha_1=60°$.

Viszont a β_1 olyan KAB egyenlő szárú háromszög csúcsánál levő szög, amelynél $KA=KB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (a kocka testátlójának fele).

Ha most a másik gúlát nézzük, akkor itt nyilvánvaló, hogy $\beta_2=60°$, tehát $\beta_2=\alpha_1$. Kérdéses még az oktaéder külső lapszöge (4. ábra).



3. ábra



4. ábra

Az ábra olyan szabályos oktaédert ábrázol, amelynek KCD lapja a rajz síkján van, míg ABE_x lapja e síkkal párhuzamos. Illesszünk ezen utóbbi lapra egy szabályos tetraédert, amelynek csúcsai A, B, E_x és F_x. Ebben az esetben az oktaédernek például a KAB lapja és a tetraédernek az F_xAB lapja egy síkban van, tehát az AB él menti két lapszög egymásnak kiegészítő szögei. A tetraéder lapszöge lesz a keresett α_2 külső lapszög. Ez benne van az E_xF_xG egyenlő szárú háromszögben. Itt $E_xG=F_xG=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, míg $E_xF_x=a$. Ugyanezt láttuk a β_1 élszögnél is. *Így az összefüggést ebben a példában is igazoltuk.*

A közös négyzet alapú, de különböző magasságú gúlák között azonban még más összefüggés is található.

II. Számítsuk ki először a gúla magasságát, mint a β függvényét!

A számítást elvégezve kapjuk: $$m = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}.$$

Most pedig a felcserélhető K_1 és K_2 gúlák m_1 és m_2 magasságai között keressünk összefüggést.

$$m_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}} \quad \text{és} \quad m_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_2}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}}.$$

Mivel most $\alpha_2 = \beta_1$ és $\beta_2 = \alpha_1$, ezért lesz

$$m_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}.$$

Itt a jobb oldalon a $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$ szerepel. Az (1) képlet $\cos \alpha_1$-re szól, tehát próbáljuk meg először a $\cos \alpha_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}$ összefüggést $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$-re megoldani.

(1)-ből $\cos \alpha_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}$. Egy ismert képletből $\cos \alpha_1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2}}$. Mivel a bal oldalak egyenlők, ezért a jobb oldalak is egyenlők, tehát

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2}}, \quad \text{ebből} \quad (2) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}.$$

Ezt felhasználva $$m_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}}}{\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}}.$$

Innen $m_1 m_2 = \frac{a^2}{4} \sqrt{2}$.

Az eredményből a következőket látjuk: Egy a oldalú négyzet O középpontján át a négyzet síkjára merőlegesen vesszük fel a gúlák (K) csúcsát. *E számtalan sok gúlát párokba tudjuk foglalni. Az egy párba tartozó gúlák élszög és lapszög adatai felcserélhetők és az egy párba tartozó gúlák magasságainak szorzatai egy állandó értéket adnak, amely* $\frac{a^2}{4}\sqrt{2}$*-vel egyenlő.* Mondhatjuk tehát, hogy *e pontpárok egy involúciós pontsor párjait alkotják. Ennek a hiperbolikus involúciónak a középpontja a négyzet középpontja* (O), *míg kettőspontjai annak a két gúlának csúcsai, amelyeknek magassága:* $m=\frac{a}{2}\sqrt[4]{2}$. (A gúla alaplapjára szimmetrikusan.) *Az involúció hatványa:*

$$m^2=\frac{a^2}{4}\sqrt{2}.$$

A kettőspontokhoz tartozó gúlákra nézve az $\alpha=\beta$ feltételből m értéke más módon is kiszámítható. Itt $\alpha=\beta\approx 65^\circ 32'$.

Szabályos háromoldalú gúlák esetében is fennáll az involúció. Az élszög és a lapszög felcserélhető. E két szög közötti összefüggés:

$$\cos\alpha=\frac{-\cos\beta}{1+\cos\beta}.$$

Az involúció hatványa: $m^2=\frac{a^2}{6}$.

Különleges gúlákra itt nincs példa, mert pl. a szabályos tetraéder párjának a magassága a tetraéderének negyedrésze. A kettőspontokra nézve azonban egy igen ismerős gúlát kapunk. Itt $\alpha=\beta=90^\circ$.

CSILLAY GYULÁNÉ
ny. főiskolai docens

Új matematika-tantervek a dolgozók általános iskoláiban

Az 1976/77. tanévtől bevezetésre kerültek a dolgozók általános iskoláiban (az 5., 6., 7. és 8. osztályokban) az *új matematika-tantervek és tankönyvek*.

A matematika-tantervek jellemzője, hogy feladatrendszerük bővült, tananyaga differenciált tagolású (törzs-, kiegészítő anyag és tájékoztató ismeretek), követelményei pontosítottabbak, és módszertani útmutatása konkrétabb, részletesebb. A tantervek azonban nem tartalmazzák a tananyagegységek óraszámait, és ezért ütemtervek készültek a tananyag heti bontásához és a tanulási ritmus kialakításához.

Az ütemtervek (esti, levelező tagozat és az intenzív tanfolyam számára) a matematika-tankönyvek végén találhatók.

A dolgozók általános iskolai 8. osztályos matematika-tankönyv azonban sajnálatosan *nem tartalmazza az intenzív tanfolyam ütemtervét*, azért ezt az alábbiakban közöljük:

8. osztály

Intenzív tanfolyamokon tanulók ütemterve

Szorgalmi idő: 16 hét
Összóraszám: 40, ebből tanítási óra: 20
konzultációs óra: 20.

Hét	Tanítási óra anyaga	Konzultációs óra anyaga	Megjegyzés
1.	I. *A természetes számok.* A természetes számok fogalma, összeadása, kivonása, szorzása és osztása.	A tizedes törtek. Mérés, mennyiségek. A közönséges törtek.	
2.	Műveletek tizedes törtekkel: összeadás, kivonás, szorzás és osztás.		
3.	Műveletek közönséges törtekkel: összeadás, kivonás, szorzás és osztás.	Közönséges törtek kifejezése tizedes törtekkel.	
4.	II. *Arány, arányosság.* Az arány. Mennyiségek aránya. Az egyenes arányosság. Következtetés egyenes arányosság alapján.		
5.	Fordított (reciprok) arányok. Fordított arányosság. Következtetés fordított arányosság alapján.	Az arányos osztás. Grafikonok.	
6.	III. *Százalékszámítás.* A százalékláb kiszámítása. A százalékérték kiszámítása.		
7.	Az alap kiszámítása.	A kamat kiszámítása.	
8.	Összefoglalás.	Ismétlés, gyakorlás.	Félévi beszámoló.
9.	IV. *A síkidomokról.* Az egyenlő szárú és az egyenlő oldalú háromszög. A háromszög szögeinek az összege.		
10.	A háromszög területe. A paralelogramma és területe.	Szerkesztések tengelyes szimmetria alapján.	
11.	A kör kerülete és területe.	Szerkesztési feladatok: háromszög. A négyszög. A sokszögek. Szögpárok.	
12.	V. *Hasonlóság.* Nagyítás, kicsinyítés. Hasonló háromszögek.	Hasonló háromszögek szerkesztése.	
13.	VI. *Testmértan.* A hasáb fogalma. A hasábok.		
14.	A gúla. A gúla felszíne és térfogata.	A kúp térfogata.	
15.	A gömb felszíne és térfogata.		
16.	Összefoglalás.	Ismétlés, gyakorlás.	Évvégi vizsga.

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74. IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is! Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő második számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

861. Hány pozitív megoldása van a

$$6183 \cos x + 27 = x$$

egyenletnek?

Bartha Gábor, Szentendre

862. Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész szám, akkor teljesül az

$$\sqrt[n]{2} - 1 \geqq \frac{1}{2n-1}$$

egyenlőtlenség!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

863. Határozzuk meg

$$\sum_{i=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt[4]{i}}$$

egész részét!

Bencze Mihály, Kolozsvár

864. Adott az ABC háromszög. Szerkesszünk olyan egyenest, amely merőleges az AB oldalra, és két egyenlő területű részre osztja a háromszöget!

865. Jelentsen n egész számot. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$$

egész szám, akkor négyzetszám!

Az 1969. évi Kürschák József tanulóverseny 1. feladata

866. Egy sakktábla minden mezejére kockát helyeztünk. Ezek lapjai a mezőkkel egybevágók. Minden kockának van fekete lapja. Azt akarjuk elérni, hogy fölül csak fekete lapok legyenek. Bizonyítsuk be, hogy ezt el lehet érni, ha kockát csak úgy mozgathatunk el, hogy teljes sorával vagy oszlopával együtt elforgatjuk annak hossztengelye körül!

Az 1969. évi Kürschák József tanulóverseny 3. feladata

Feladatmegoldások (849—854.)

849. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2} = 1977 \tag{1}$$

egyenletnek tetszőleges y_i $(i=1, 2, 3, 4)$ pozitív egész számokhoz van nem negatív egész számokból álló (x_1, x_2, x_3, x_4) megoldása!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: Jelöljük a tetszőleges y_i pozitív egész számokból előálló $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$ pozitív egész számot Y-nal, akkor (1) ekvivalens az

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1977Y \tag{2}$$

egyenlettel. *Lagrange* nevezetes tétele szerint minden pozitív egész szám felbontható négy (nem feltétlenül különböző) négyzetszám összegére (bizonyítását l. pl. a következő műben: *Erdős—Surányi:* Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Bp., 1960. 174—179. oldal). Ez a tétel — mivel $1977Y$ pozitív egész szám — biztosítja a (2)-t, illetve (1)-et kielégítő nem negatív egész számokból álló (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyes létezését.

II. megoldás: Lagrange idézett tételének bizonyítása nem könnyű. Ismert bizonyításaiban lényeges szerepet játszik a következő, *Eulertől* származó azonosság, amely az

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (-a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2$$

azonosság általánosítása:

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) = \\ = (-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+ \\ +(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2.\end{aligned} \tag{3}$$

A (3) azonosságot polinommá alakítással könnyen igazolhatjuk. Komplex számokon át történő levezetését l. pl. a következő egyetemi jegyzetben: *Gyarmati:* Számelmélet, Tankönyvkiadó, Bp., 1973. 280—281. oldal.

A (3) azonosságból már kiolvasható a feladat állításának igaz volta: az

$$1977 = 1^2+2^2+6^2+44^2$$

felbontás figyelembevételével írjuk be (2) jobb oldalára (3) jobb oldalát. A keresett x_i értékek számára választhatjuk rendre a (3) jobb oldalából felírt alapok abszolút értékét, amelyek nyilván mind nem negatív egész számok.

Bartha Gábor, Szentendre, Hazag Tibor, Budapest és Kamarás Lajos, Pécs

Megjegyzés: Több megoldó megállapította, hogy a megoldás nem egyértelmű. Az 1977-re a következő más felbontásokat találták:
(0; 8; 8; 43), (0; 4; 5; 44), (0; 4; 19; 40), (0; 25; 26; 26), (0; 10; 14; 41), (1; 4; 14; 42), (1; 20; 26; 30), (2; 20; 22; 33), (3; 4; 4; 44), (4; 10; 30; 31), (9; 10; 14; 40). Sokan hozzáfűzték, hogy a feladat állítása érvényes 1977 helyett bármely természetes számra. Bogdán Zoltán megjegyezte, hogy a feladat állítása tetszőleges y_i egészekre igaz, ha van köztük 0-tól különböző.

Megoldók száma: 20.

850. Bizonyítsuk be, hogy az x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ pozitív számokra mindig teljesül a

$$\Sigma x_{k_1}x_{k_2} \dots x_{k_r} \leqq \frac{1}{n}\binom{n}{r}\sum_{i=1}^{n} x_i^r \tag{1}$$

egyenlőtlenség, ahol a bal oldalon az összegezés az x_i számok összes különböző r-tagú kombinációjának szorzatára vonatkozik.

Geőcze Zoárd Antal László, Cataguases (Brazília)

I. megoldás: Az n elemű halmaznak 0-tagú kombinációja egyedül az üres halmaz, erre a feladatnak nincs értelme. Az $r=1$ esetben (1) alatt az egyenlőség érvényes, tetszőleges x_i számok mellett. A továbbiakban csak az $r>1$ esetre gondolunk.

Egy-egy r tagú kombináció $(1<r\leqq n)$ elemeinek szorzata a mértani közepük r-edik hatványa. Írjuk fel ezt a szorzatot r-edik gyökként, és — hogy megbecsüljük felülről — alkalmazzuk a számtani és mértani középre vonatkozó azonos egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[r]{x_{k_1}^r x_{k_2}^r \dots x_{k_r}^r} \leqq \frac{x_{k_1}^r + x_{k_2}^r + \dots + x_{k_r}^r}{r}. \tag{2}$$

Itt az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha az $x_{k_j}^r$ számok, azaz ha az x_{k_j} számok mind egyenlők egymással. Ahhoz, hogy kombinációkról beszélhessünk, n különböző elemből álló halmazra van szükségünk, mégis megengedhetjük, hogy az x_i számok közt egyenlők is legyenek, ha indexezéssel megkülönböztetjük őket egymástól.

Írjuk fel a (2) egyenlőtlenséget minden egyes kombinációra:

$$x_1 x_2 \dots x_r \leqq \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_r^r}{r},$$

$$x_{n-r+1} x_{n-r+2} \dots x_n \leqq \frac{x_{n-r+1}^r + x_{n-r+2}^r + \dots + x_n^r}{r}. \tag{3}$$

A (3) alatti $\binom{n}{r}$ számú egyenlőtlenség bal oldalainak összege az (1) bal oldala. A (3) alatti jobb oldalak összegét $\frac{1}{r} x_i^r$ alakú tagok összegeként foghatjuk fel. Pl. az x_1 annyi egyenlőtlenségben szerepel, ahány különböző módon kiválaszthatunk hozzá a fennmaradó $n-1$ elem közül $(r-1)$-et a sorrendre való tekintet nélkül, azaz $\binom{n-1}{r-1}$ egyenlőtlenségben. Mindegyikből egy $\frac{1}{r} x_1^r$ tag járul az összeghez, összesen $\binom{n-1}{r-1} \frac{1}{r} x_1^r$. Ugyanezt elmondhatjuk bármelyik $\frac{1}{r} x_i^r$-ről, ezért (3)-ból összeadással ezt kapjuk:

$$\sum x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_r} \leqq \binom{n-1}{r-1} \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{r}, \tag{4}$$

és itt az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha a (3) alattiakban mindenütt ez áll fenn, azaz ha minden x_i egyenlő egymással. (Az „... akkor..." állítás nyilvánvalóan igaz; a „... csak akkor..." állítás pedig azért, mert ha a az igaz (3) alattiak valamelyike szigorú egyenlőtlenségjellel volna érvényes, akkor (4)-ben is ez állna, és ez ellentmondana (4)-ben az egyenlőségek feltételezésének.)

A (4) jobb oldala — mint azt egyszerű számítás mutatja — azonosan egyenlő (1) jobb oldalával. Ezzel (1) bizonyítást nyert, és az is kiderült, hogy az $r>1$ esetben az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely és Kamarás Lajos, Pécs

II. megoldás: Az $\binom{n}{r}$-rel osztva és r-edik gyököt vonva az (1)-gyel ekvivalens

$$\sqrt[r]{\frac{\sum x_{k_1} \dots x_{k_r}}{\binom{n}{r}}} \leqq \sqrt[r]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}} \tag{5}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A bal oldal az n darab $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitív szám r-ed rendű szimmetrikus közepe, jelöljük $\sum_r(x)$-szel. Ismeretes (l. pl. *Skljarszkij—Csencov—Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, I. Aritmetika és algebra, Tankönyvkiadó, Bp. 1965., 285—286. feladat), hogy ha $k>l$, akkor $\sum_k(x) \leqq \sum_l(x)$, és az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $x_1=x_2=\dots=x_n$. Ennek értelmében (5) bal oldalára igazak:

$$\sum_r(x) \leqq \sum_{r-1}(x) \leqq \dots \leqq \sum_2(x) \leqq \sum_1(x).$$

De $\sum_1(x)$ éppen a számtani közép, amelyre vonatkozólag ugyancsak ismert tétel, hogy nem nagyobb az r-ed rendű hatványközépnél (az (5) jobb oldalánál), és az egyenlőség $r>1$ mellett akkor és csak akkor áll fenn, ha az x_i számok egyenlők.

Ezekből a tételekből következik (5) és (1) igaz volta, és az is, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Fehér József, Csongrád és Kun Péter, Szentendre

Megjegyzés: A feladat állítása érvényes akkor is, ha az x_i-k közt nullák vannak.

Szánthó Gyula, Gyula

Megoldók száma: 11.

851. Igazoljuk, hogy ha $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, akkor mindig teljesül a

(1) $$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta$$

egyenlet.

Róka Sándor, Tiszavasvári

I. megoldás: A bal oldalon nem szerepel a δ, ezért hagyjuk egyedül a jobb oldalon a δ-t tartalmazó tagot:

(2) $$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma = \sin\beta\sin\delta.$$

A bal oldalt alakítsuk át így:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma =$$

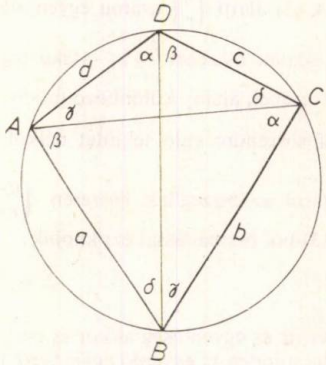
$$= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma =$$

$$= \sin\beta\cos\beta(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)+\cos^2\beta\sin\alpha\sin\gamma+$$

$$+\sin^2\beta\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \sin\beta\cos\beta\sin(\alpha+\gamma)+\sin^2\beta\cos(\alpha+\gamma) =$$

$$= \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$



A (2)-vel ekvivalensek ezek:

(3) $$\sin\beta[\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\delta] = 0,$$

(4) $$\sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2} = 0.$$

Ha $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, akkor teljesül (4), és ezért (1) is.

II. megoldás: Két-két sinus szorzatát összeggé fogjuk alakítani, ezért szorozzuk (1) mindkét oldalát 2-vel és a δ-t tartalmazó tagot hagyjuk egyedül:

(5) $$2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-2\sin\alpha\sin\gamma = 2\sin\beta\sin\delta.$$

A $2\sin u\sin v=\cos(u-v)-\cos(u-v)$ azonosságot alkalmazva, és a cosinus-különbséget újból szorzattá alakítva ezeket az (1)-gyel ekvivalens egyenleteket kaphatjuk:

$$\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)-[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)] = 2\sin\beta\sin\delta,$$

$$2\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta = 2\sin\beta\sin\delta.$$

A legutóbbi nyilván teljesül, ha a feltétellel ekvivalens $\alpha+\beta+\gamma=\pi-\delta$ egyenlet teljesül.

Csorba Ferenc, Győr, Füredíné Kondor Judit, Budapest és Zsidó György, Kolozsvár

Megjegyzés: A bizonyított tételből következik *Ptolemaiosz* tétele. Ha ugyanis az $ABCD$ húrnégyszög oldalai $AB=a$, $AC=b$, $CD=c$, $DA=d$, átlói pedig $AC=e$, $BD=f$, akkor az ábra jelölései szerint a $h=2r\sin\omega$ összefüggés alapján

$$ac+bd = 4r^2(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta), \text{ és}$$

$$ef = 4r^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),$$

ahol r a körülírt kör sugara. Mivel teljesül, hogy $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, ezért — hivatkozva a feladat állítására — igaz az $ac+bd=ef$ összefüggés.

Ha pedig Ptolemaiosz tételét más úton már igazoltuk, akkor következik belőle a feladat állítása, de nem minden forgásszögre, hanem csak 0 és π közti szögekre.

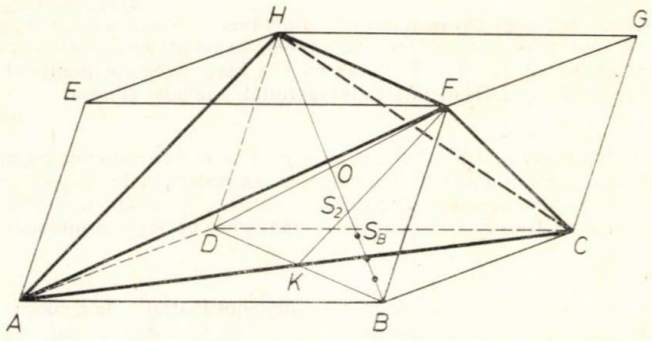
Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

Megoldók száma: 36.

852. Egy paralelepipedonba beírt tetraéder lapsíkjai a paralelepipedonból négy tetraédert metszenek le. A paralelepipedon térfogatának mekkora része annak a tetraédernek a térfogata, amelynek csúcsai a levágott tetraéderek súlypontjai?

Fitos László, Nyíregyháza

Megoldás: Ismeretes, hogy minden paralelepipedonba két tetraédert lehet írni, amelyek a paralelepipedon centrumára nézve egymás tükörképei, tehát egybevágók, ennélfogva egyenlő térfogatúak is. Nézzük az $ABCDEFGH$ paralelepipedonba írt $ACFH$ tetraédert (l. ábrán). Az $AFCB$ levágott tetraéder S_B súlypontját megkaphatjuk, ha az ACF háromszög S_2 súlypontját B-vel összekötő szakasznak vesszük az S_2-höz legközelebbi negyedelő pontját (e tétel közismert, bizonyítása könnyű elemi úton is, vektorokkal is). A BKS_2 háromszög hasonló a HFS_2 háromszöghöz, mert két-két oldaluk aránya és az általuk közrefogott $K\sphericalangle$, illetve $F\sphericalangle$ egyenlő. Ebből könnyen beláthatjuk, hogy a B, S_2, H pontok egy egyenesre esnek, és hogy $S_2H=2\cdot BS_2$. Az eddigiekből következik, hogy S_B felezi az OB szakaszt, ahol O a paralelepipedon centruma. Ez azt jelenti, hogy az O centrumú $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság H-t az S_B-be viszi.



Az okoskodás mindegyik levágott tetraéderre érvényes, ezért azt kaptuk, hogy az $S_BS_DS_ES_G$ tetraéder centrálisan hasonló a $HFCA$ tetraéderhez. Minthogy a hasonlóság aránya abszolút értékben $\frac{1}{2}$, ezért a térfogatuk aránya $\frac{1}{8}$. Könnyen adódik, hogy bármelyik levágott tetraéder térfogata a paralelepipedonénak $\frac{1}{6}$ része, a négy levágott tetraéderé együtt $\frac{2}{3}$ része, ennélfogva a beírt tetraéder térfogata $\frac{1}{3}$ része a paralelepipedon térfogatának. Végül is a levágott tetraéderek súlypontjaival, mint csúcsokkal meghatározott tetraéder térfogata $\frac{1}{24}$ része a paralelepipedon térfogatának.

Gaál László, Sepsiszentgyörgy, Kelemen Lajos, Kisvárda, Szilágyi István, Esztergom és Tóth Gyula, Zirc

Megoldók száma: 13.

853. Igazoljuk, hogy ha a háromszög magasságai m_a, m_b, m_c és tetszőleges belső pontjának távolsága a megfelelő oldalegyenesektől t_a, t_b, t_c, akkor

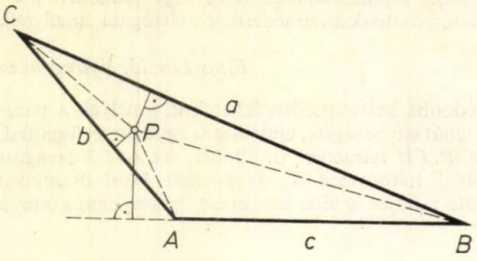
$$m_am_bm_c \geqq 27t_at_bt_c. \tag{1}$$

Kocsó Ferenc, Marosvásárhely

Megoldás: Keressünk kapcsolatot a magasságok és a belső P pont oldalegyenesektől mért távolságai közt. Kínálkozik a PA, PB, PC szakaszok meghúzása, ezzel a háromszöget három részháromszögre bontottuk, területük rendre

$$T_1=\frac{1}{2}at_a,\quad T_2=\frac{1}{2}bt_b,\quad T_3=\frac{1}{2}ct_c. \tag{2}$$

A magasságok viszont kifejezhetők az eredeti háromszög $T(=T_1+T_2+T_3)$ területével. Az (1)-be írjuk be az utóbb említett kifejezéseket, valamint a (2)-ből a t_a-ra, t_b-re, t_c-re felírhatókat. Az így



kapott

$$(3) \qquad \frac{8T^3}{abc} \geqq 27\frac{8T_1T_2T_3}{abc}$$

egyenlőtlenség átfogalmazása az (1) alattinak. A (3)-mal ekvivalens a

$$(4) \qquad (T_1+T_2+T_3)^3 \geqq 27T_1T_2T_3,$$

továbbá a

$$(5) \qquad \frac{T_1+T_2+T_3}{3} \geqq \sqrt[3]{T_1T_2T_3}$$

egyenlőtlenség.

Közismert, hogy (5) nem negatív számokra azonosan teljesül. Fontos még megvizsgálnunk, hogy mikor áll fenn az egyenlőség. Az (5)-ben, és emiatt az (1)-ben is az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $T_1=T_2=T_3$, azaz ha P a háromszög súlypontja (1. az 1936. évi Kürschák József tanulóverseny 2. feladatát). Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

I. megjegyzés: Ha adott háromszögben a P a háromszögvonalra is kerülhet, akkor itt a $t_at_bt_c$ szorzat értéke mindenütt 0, a súlypontban pedig pozitív szigorú abszolút maximuma van. Válasszunk a maximumnál kisebb pozitív számot, és keressük azon pontok halmazát, amelyekre a $t_at_bt_c$ szorzat a felvett érték. Ilyen felvett számokhoz egy-egy „szintvonal" adódik.

Vermes Miklós, Budapest

II. megjegyzés: A feladatot általánosíthatjuk tetraéderre. Ha a tetraéder magasságai m_a, m_b, m_c, m_d, tetszőleges belső pontjának távolsága a megfelelő lapsíkoktól t_a, t_b, t_c, t_d, akkor

$$m_am_bm_cm_d \geqq 4^4t_at_bt_ct_d.$$

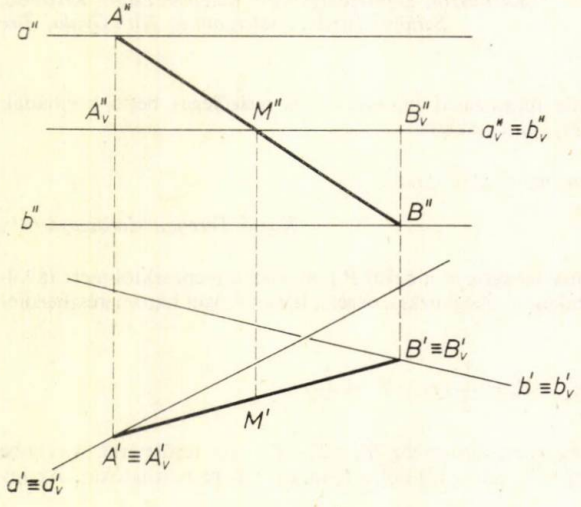
Gaál László, Sepsiszentgyörgy és Vermes Miklós, Budapest

Megoldók száma: 34.

854. Mi a mértani helye azon adott hosszúságú szakaszok felezőpontjainak, amelyek két adott kitérő egyenes egy-egy pontját kötik össze?

Kamarás Lajos, Pécs

Megoldás: Az adott kitérő egyeneseket jelöljük a-val, illetve b-vel. Ismeretes, hogy egyetlen (α, β) síkpár létezik úgy, hogy $\alpha\|\beta$, $a\leftarrow\alpha$, $b\leftarrow\beta$, továbbá, hogy a normáltranzverzális szakasz az a-t és b-t összekötő szakaszok közül az egyetlen legrövidebb. Ha tehát az adott d szakasz egyenlő a és b normáltranzverzális szakaszával, n-nel, akkor a keresett ξ ponthalmaz egyetlen pontból, a normáltranzverzális szakasz felezőpontjából áll; ha pedig $d<n$, akkor ξ az üres halmaz. A továbbiakban a $d>n$ esetét vizsgáljuk.



Az (α, β) síkpár középpárhuzamos síkja a és b mindegyik tranzverzális szakaszát felezi, ezért $\xi\subset\gamma$. Az ábra a Monge-féle ábrázolással készült, az α, β, γ síkok az első képsíkkal egyező állásúak.

Tegyük fel, hogy $AB=d$ ($A\leftarrow a$, $B\leftarrow b$), akkor AB M felezőpontja a γ síkon van; az AB γ-ra eső A_vB_v vetületének hossza

$$d_1=\sqrt{d^2-n^2},$$

ami állandó; $A_v \to a_v$ és $B_v \to b_v$, ahol a_v és b_v a-nak, illetve b-nek a γ síkra eső vetülete; M az A_vB_v szakasznak is felezőpontja. Ha tehát $M \in \xi$, akkor M eleme az adott a_v, b_v egyenesek közti adott d_1 pozitív hosszúságú szakaszok felezőpontjaiból álló η ponthalmaznak: $M \in \eta$.

Fordítva: Tekintsük az adott a, b egyenesekből kiindulva a síkot és a ráilleszkedő a_v, b_v egyeneseket! Tegyük fel, hogy az utóbbiak egy-egy pontját az adott d_1 pozitív hosszúságú A_vB_v szakasz köti össze, és ennek felezőpontja $M : M \in \eta$, akkor e szakasz végpontjait a-ra, illetve b-re vetítve a és b d hosszúságú tranzverzális szakaszához jutunk, amelynek felezőpontja $M : M \in \xi$.

Két utóbbi eredményünkből következik, hogy $\xi = \eta$, tehát elegendő az η ponthalmazt megkeresnünk.

Vegyük fel az a_v, b_v metsző egyenesek síkján a derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a tengelyek éppen a szögfelezők legyenek; ekkor a két egyenest az mx, illetve $-mx$ kifejezések jellemzik, ahol m adott pozitív szám.

Ha az adott egyenesek egy-egy pontját összekötő P_1P_2 szakasz hossza d_1, azaz teljesül az

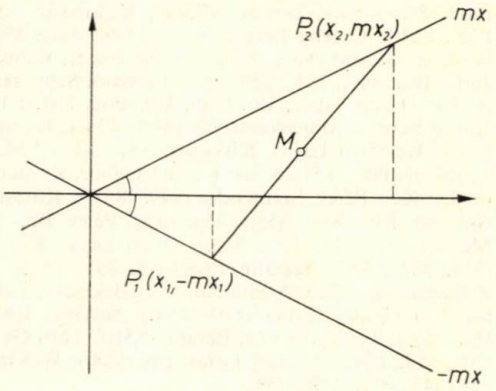
(1) $$(x_2 - x_1)^2 + (mx_2 + mx_1)^2 = d_1^2$$

egyenlet, akkor teljesülnek ezek is:

$$\frac{1}{d_1^2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{m^2}{d_1^2}(x_1 + x_2)^2 = 1,$$

$$\frac{(mx_2 - mx_1)^2}{m^2 d_1^2} + \frac{m^2}{d_1^2}(x_1 + x_2)^2 = 1,$$

(2) $$\frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}{\frac{d_1^2}{4m^2}} + \frac{\left(\frac{mx_2 - mx_1}{2}\right)^2}{\frac{m^2 d_1^2}{4}} = 1.$$



A (2) teljesülése azt jelenti, hogy a P_1P_2 szakasz $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{mx_2 - mx_1}{2}\right)$ felezőpontja illeszkedik az

(3) $$\frac{x^2}{\frac{d_1^2}{4m^2}} + \frac{y^2}{\frac{m^2 d_1^2}{4}} = 1$$

ellipszisre, amely pontosan a $\frac{d_1}{2m} = \frac{md_1}{2}$, azaz $m = 1$ esetben körré fajul.

Megfordítva: Tegyük fel, hogy a $(\xi; \eta)$ pont rajta van a (3) ellipszisen ($m = 1$ esetén körön), akkor a (2)-vel való összehasonlítás az

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \xi,$$

$$\frac{mx_2 - mx_1}{2} = \eta$$

egyenletrendszerre vezet, ezt x_1, x_2-re megoldva nyerjük a

(4) $$\xi = \frac{\left(\xi - \frac{\eta}{m}\right) + \left(\xi + \frac{\eta}{m}\right)}{2}, \quad \eta = \frac{m\left(\xi + \frac{\eta}{m}\right) - m\left(\xi - \frac{\eta}{m}\right)}{2}$$

azonosságokat.

Ha most már — újból elindulva — feltesszük, hogy $(\xi; \eta)$ illeszkedik a (3) ellipszisre (illetve a körre), akkor a (4) jobb oldalain álló számok is kielégítik (3)-at, és — visszafelé haladva — a $\left(\xi - \frac{\eta}{m}; \xi + \frac{\eta}{m}\right) = (x_1; x_2)$ számpárra teljesül a (2), ebből következően (1) is; de ezek szerint az a_v-re

és b_v-re illeszkedő $(x_1; -mx_1)$, illetve $(x_2; mx_2)$ pontok összekötő szakaszának felezőpontja a $(\xi; \eta)$ pont, hossza pedig d_1.

Azt kaptuk ezzel, hogy az (a_v, b_v) síkon a keresett η ponthalmaz a (3) ellipszis ($m=1$, azaz $a \perp b$ esetén kör), és ez a feladatban keresett ξ ponthalmaz is.

Megjegyzés: Hasonlóan lehet tárgyalni a probléma következő általánosítását: az adott hosszúságú szakaszon adott arányú osztópont vizsgálatát; az eredmény ellipszis, amely esetleg elfajul.

Kamarás Lajos, Pécs és Szánthó Gyula, Gyula

Megoldók száma: 15.

Megoldók névsora (849—854.)

Almási Béla, Ózd (851—854.); Bagi Gábor, Barcs (853.); Bartha Gábor, Szentendre (849. két mód, 850—854.); Bencze Mihály, Kolozsvár (851., 853.); Bogdán Zoltán, Cegléd (849—851., 853., 854.); Csorba Ferenc, Győr (849., 851., 853.); Dékány Veronika, Bp. (851., 853.); Dudás Rozália, Szeged (851., 853.); Fehér József, Csongrád (850., 851., 853., 854.); Füredíné Kondor Judit, Bp. (849., 851—854.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (851—853.); Görbe László, Kecskemét (853.); Hazag Tibor, Bp. (849. két mód, 851.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (849—854.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (849—854.); Kamarás Lajos, Pécs (849. két mód, 850., 851., 853., 854.); Kelemen Lajos, Kisvárda (851., 852., 854.); Kishalmi Rózsa, Szeged (851., 853.); Kotek Lászlóné, Pécs (851., 853.); Kovács Gábor, Komárom (849., 851., 853.); Kovács Zoltán, Szádalmás (853.); Kun Péter, Szentendre (849—853.); Kurcsics László, Csorna (849., 851.); Makora Tiberiu, Szatmár (849., 851., 853.); Marosvári Péter, Bp. (849., 851.); Méri Béla, Bp. (851.); Nyíró László, Mezőkövesd (849., 851., 853.); Óvári Lajos, Kecskemét (849—851., 853.); Papp László, Karcag. (851., 853.); Polcz Katalin, Pécs (849., 851—854.); Rosta Ferenc, Esztergom (853.); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (852.); Szabó Jánosné, Békéscsaba (849., 851., 853.); Szalai Istvánné, Bicske (851.); Szánthó Gyula, Gyula (850—854.); Szilágyi István, Esztergom (850—854.); Temesvári Ágota, Bp. (853.); Terdik Ferenc, Báránd (851.); Tóth Gyula, Zirc (849—853.); Vermes Miklós, Bp. (849., 851., 853., 854.); Vigassy Lajos, Bp. (854.); Wekszli Árpád, Csorna (851.); Zsidó György, Kolozsvár (849., 851., 853., 854.).

KÖNYVISMERTETÉS

POGÁTS FERENC:

„Úton a matematikatanítás reformja felé"
című könyvről

(**Új utak a matematika tanításában** című sorozat, 3. kötet, Tankönyvkiadó, 1976.)

A kötetben levő négy tanulmány közül egyedül a második (*Nagy Lajosné dr.:* Komplex matematikatanítási kísérlet az Egri Tanárképző Főiskola Gyakorló Iskolájában, 35—189. oldal) halad a sorozat és a könyv címében jelzett úton. A másik három tanulmány tévtanokkal tévutakra, zsákbamacskával zsákutcába csalogat. Megjelenésük nem a szerzők vétke. Ők csak megírták.

Az első tanulmány (*Dr. Lénárd Ferenc:* A matematikatanítás korszerű megalapozásának néhány pszichológiai problémája. 7—33. oldal) kettős célú. Egyrészt — amennyire lehetséges — kételyt támasztani a most bevezetésre kerülő tantervvel, annak módszerével és eszközeivel szemben; másrészt elméleti megalapozását adni a szerző saját eljárásának, amelynek gyakorlatából a harmadik tanulmány ad ízelítőt (*Demeter Katalin:* Részletek a variációs matematikatanítás eljárásrendszeréből. 191—241. old.)

A szerző mindkét célnak úgy vél eleget tenni, hogy szaktekintélyek kijelentéseivel érvel, különös tekintettel egyrészt szovjet szaktekintélyekre, másrészt saját magára (10—12., 14., 19., 30—31. oldal). Lehet, hogy nem ismer más — akár szintén szovjet — szerzőket, akik az általa idézetteknek éppen az ellenkezőjét állítják? Lehet, hogy nem tud a saját maga által idézett szerzőknek (pl.: Mencsinszkaja, Davidov, Okon) az övével ellenkező véleményeiről?

Csak egy példa. Szerző: „Az eddigiekből is láthatjuk, hogy... a nevelési feladatokat azok

a korszerűsítési eljárások képtelenek megvalósítani, amelyek... az osztályfoglalkoztatás helyett kiscsoportos tanítást vezetnek be..." (29—30. oldal).

Okon (a szerző által idézett és tanulmányának irodalomjegyzékében feltüntetett könyv 151. oldalán a kiscsoportos oktatásról szólva): „... a legszorosabban kapcsolódik a szocialista nevelésnek mint közösségben és közösségért folyó nevelésnek szükségleteihez."

A tekintélyi érvekhez csatlakoznak olyan kijelentések is, mint pl.: „kísérletileg igazol*ható*, hogy ..." (24. oldal). Ez eddig hittan. Arról, hogy hol, mikor, kik, hogyan és milyen körülmények között igazol*ták*, semmit sem tudunk meg.

Tájékozatlanságára jellemző, amit a színes rudak alkalmazásáról ír. Szerinte ennek lényege az, hogy a tanulók nem számokkal, hanem színekkel dolgoznak (27. oldal). Holott az általa idézett 1. osztályos kézikönyvből is kiderül, hogy az egység *bármely* rúd lehet, tehát nem a rudak vagy a színek a számok, hanem kétkét rúd hosszának (térfogatának) *aránya* egy-egy szám. Ehhez csak annyit, hogy a szerző által gyakran idézett Davidov „Életkor és ismeretszerzés" című könyvében a valós számok fogalmának megközelítésére éppen a mennyiségek összehasonlításából, a mérésből való kiindulást javasolja már kisgyermek korban.

A fentiekkel jellemezhető az első tanulmány érvelési rendszere.

De nézzük az elmélet gyakorlati megvalósítását: a „variációs" tanítást! A harmadik tanulmány — az előbbi hangszerelésben — ugyancsak vitatja mindazokat a módszereket és eszközöket, amelyek a most bevezetésre kerülő tanterv integráns részei. Nem volna baj, hogy vitatja, ha jól vitatná és elfogadható ellenjavaslatokkal élne. De amit helyette kínál: a „variációs rendszert", annak katasztrofális hatásáról maga a szerző számol be.

E rendszer kifejtése és feldicsérése után ezeket olvashatjuk (204—205. oldal): „Tanításunkban bevezettük azt az igen egyszerű fogást, hogy minden kérdés, feladat mindig egyszer és csak egyszer hangzik el, ..." „Ha a tanulókat hozzászoktatjuk ahhoz, hogy a kérdés csak egyszer hangzik el, rendkívül figyelmezetten viselkednek, és képességeik fejlődésére nagy lehetőség adódik."

Íme: „Első osztályban, tanév kezdetén játszódott le az eset. *X* tanító sorban diktálta az óra eleji kérdéseket. Valószínűleg megcsúszott a szeme a papíron, és ugyanazt a feladatot mondta el még egyszer. Önellenőrzésre került a sor, s egy eredmény kétszer hangzott el. Miután kibogarászták a félreértés okát, a pontok összesítésére került sor: ki ért el hét, hat stb. pontot? Ezen az órán a hetesből nyolcas lett. A gyerekek követelték, hogy a „becsúszott" feladatra is megkapják a pontot, elvégre az *kétszer hangzott el, és ők kétszer számították ki.* (A kiemelés tőlem. P.) Az eset számunkra azt tükrözte, hogy a gyerekek agyában meg sem fordult az a lehetőség, hogy egy feladatot el lehetne vagy el kellene ismételni."

Számomra az eset mást tükröz. A gyerekeket igen hamar sikerült rászoktatni a merev sablonok, dogmák (pl.: minden feladat csak egyszer hangzik el) szabályozta tevékenységre. Minden nem variált gyereknek észre kellett volna vennie azt, hogy a két egymás utáni feladat azonos, elég tehát az egyiket megoldani. De ők nem, nem vették észre. Képességeik ilyetén fejlődését maguk a gyerekek kétszeres pontszámmal méltányoltatják — és a tanító is így méltányolja!

Hogy a variációs eljárás valóban elvezet-e a „nem mechanikus, hanem rutinos" számoláshoz, az enyhén szólva kérdéses. Egy azonban nem kérdéses: e tanulók mereven, mechanikusan gondolkodnak, a módszer erre kényszeríti őket. Számukra minden feladat új, eddig sohasem volt. Isten őrizz eltűnődni azon, vajon találkoztam-e már ilyennel vagy ehhez hasonlóval. Ezeket az „erényeket" minden számológép gyakorolja, csak sokkal gyorsabban. Ezek az „eredmények" természetesen nem mutatkoznak az osztályzatok tükrében. Ami az „objektív, tudományos értékű, bizonyítékként elfogadható" osztályzatokat vagy az ezekből nyert adatokat (237. old.) illeti: bármely, hasonló körülményű kísérletből pusztán osztályzatokkal kimutatható annak *önmagához mért* eredményes volta. Mégcsak manipulálni sem kell: akiket négy évig gondosan tanítunk az „ujjgyakorlatokra", azok ebben csakugyan kiváló eredményt érnek el, s ezt könnyen ki is lehet mutatni.

Kivéve, ha követjük azokat a tanácsokat, amelyeket a negyedik tanulmány (Oktatási módszerek eredményességének vizsgálata. 243—276. oldal) ad tanítási módszerek eredményességének értékeléséhez. Ezek ugyanis nem alkalmasak semmiféle értékelésre. A szerző elemi hibákat követ el: összecseréli a várható értékek hányadosát tapasztalati átlagok hányadosával (253. és 272. oldal), az „F" próbában a szórások hányadosát veszi a korrigált tapasztalati szórásnégyzetek hányadosa helyett (267. oldal) stb. Amit nagy matematikai apparátussal bizonyít (a 272. oldalon), az az adatok helyes értelmezése esetén csupán annyi, hogy a tanulók két teszt között eltelt időben jóformán semmit sem tanultak. Hibás maga az az elindulás, amely szerint bármely két oktatási módszer közül az a jobb, amelyben az elért pontszámok és a tanulásra fordított idők összegeinek hányadosa nagyobb.

E három tanulmány megjelentetése legfeljebb arra volt jó, hogy próbára tegye az olvasók érettségét, vajon helyére tudják-e tenni magukban, amit olvasnak. Bízunk abban, hogy a könyvet olvasó pedagógusok nagy többsége kiállja ezt a próbát.

3,50 Ft

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

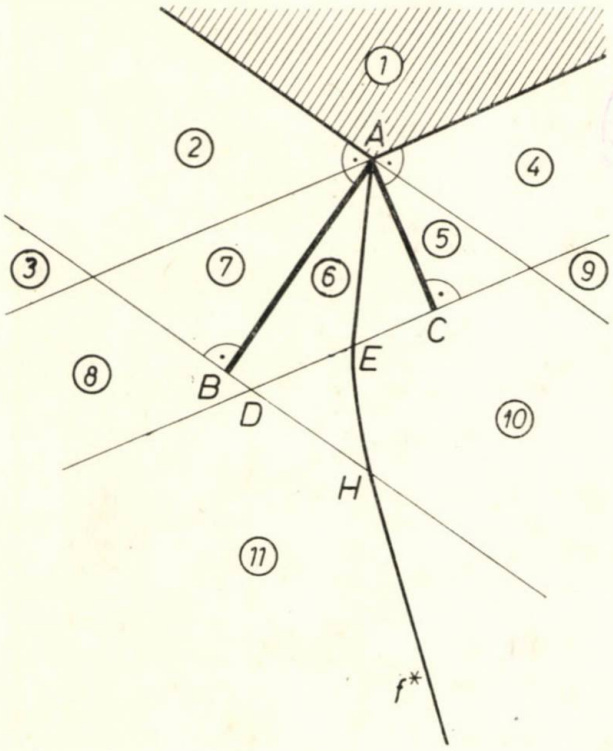
	Fűzve
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztály matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Előd Istvánné: Számoljunk együtt 5—6. osztály (52 314)	10,—
Gádorné—Vári: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztályában (92 325)	20,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium I. osztályában a matematika tanításához (92 121)	20,—
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (90 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Szintezési útmutató a 10 121/I-II-III. sz. Matematikai feladatgyűjteményhez. Szerkesztő: Némethy Katalin (92 331)	10,—
Tatár István: Matematikai mozaik a matematikatagozatra előkészítő 5—6. osztályos szakkörök számára (19 009)	12,50
Hámori Miklós: Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. Az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Obádovics—Szelezsán: Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (29 215)	12,—
Kovács Győző: Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet) (29 227)	11,—
Lukács Ottó: Koordinátageometria vektorokkal a síkban és a térben (Középiskolai szakköri füzet (29 219)	13,50
Jakab Albert—Pelle Béla—Perge Imre—Szepessy Bálint: Gyakorlati számolások (29 209)	10,50
Dr. Fodor János—Dr. Horváth Attila—Rábai Imre—Székely Jenő: Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára I. kötet 8141/I.	22,—
II. kötet 8141/II.	28,50

Beszerezhetők a
17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.)
44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1977. december * XXIV. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 228—238.
77-4203 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI, Budapest V., József nádor tér 1., telefon: 180-850, postacím: *1900 Budapest*) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Előfizetési díj egész évre 14 Ft. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Dr. Urbán János: A szovjet matematikatanítás reformjáról (A Nagy Októberi Szocialista Forradalom 60. évfordulója alkalmából) 97
Hódi Endre: Beszámoló a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpiáról 99
Hódi Endre: Megemlékezés Carl Friedrich Gaussról 108
Szabó Kálmán: Algebrai egyenlőtlenségek megoldása geometriai úton 112
Helyesbítés 115

FELADATOK 116

Könyvismertetés 128

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р. Йанош Урбан: О перестройке обучения математики в СССР по случаю 60. годовщины Великой Октябрьской Социалистической Революции 97
Эндре Ходи: Отчёт о XIX-ой Интернациональной олимпиаде по математике . 99
Эндре Ходи: Упоминание о Карле Фридрухе Гауссе 108
Калман Сабо: Решение алгебраических неравенств геометрическим путём.... 112
Поправление 115

ЗАДАЧИ 116

Рецензия 128

INHALT

Dr. Urbán, János: Über die Reform des sowjetischen Mathematikunterrichts (Anlässlich des 60-jährigen Jubiläums der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution) 97
Hódi, Endre: Bericht über die XIX. Internationale Mathematik-Olympiade 99
Hódi, Endre: Erinnerung an Carl Friedrich Gauss 108
Szabó, Kálmán: Die Lösung algebraischer Ungleichungen auf geometrischem Wege 112
Berichtigung 115

AUFGABEN 116

Buchbesprechung 128

DR. URBÁN JÁNOS
főelőadó, OPI

A szovjet matematikatanítás reformjáról

(A Nagy Októberi Szocialista Forradalom 60. évfordulója alkalmából)

A Nagy Októberi Szocialista Forradalom hatvanadik évfordulójával kapcsolatos megemlékezések, méltatások sorában a matematikai tudományok és a matematika tanításának modernizálása terén elért szovjet eredmények ismertetésére különkülön is terjedelmes tanulmányt kellene szentelni.

A matematikai tudományok terén elért kimagasló szovjet eredmények vázlatos felsorolására sincs lehetőségünk itt. Csupán néhány olyan fontos területet említünk, ahol kiemelkedő jelentőségű tudományos eredmények születtek: a komplex függvénytan, a differenciál- és integrálegyenletek elmélete, a valószínűségszámítás, a matematikai logika, a matematika közgazdaságtudományi alkalmazásai. A felsorolt tudományágakban elért eredményeket olyan világhírű tudósok neve fémjelzi, mint A. I. Markusevics, L. S. Pontrjagin, A. N. Kolmogorov, A. A. Markov, L. V. Kantorovics.

A hatalmas szovjet matematikai tudományos eredmények elérésében természetesen jelentős szerepe van a szovjet iskolarendszer, a szovjet pedagógia oktatási, nevelési eredményeinek is. Az elmúlt hatvan év során a szovjet matematikatanítás is hatalmas fejlődésen ment keresztül.

Az előttünk álló egyik legfontosabb feladat az 1972-es oktatáspolitikai párthatározat végrehajtása. Új tantervek, új tankönyvek készültek, sikeresen folyik az áttérés az új, egységes, korszerű általános iskolai matematika-tantervre, és bevezetésre kerülnek az új középiskolai tantervek is. Úgy vélem, ezeknek a feladatoknak sikeres megvalósításához kaphatunk segítséget akkor, ha a szovjet matematikatanítás reformjának legutóbbi évtizedét tekintjük át, elemezzük a reform során nyert tapasztalatokat.

Az SZKP oktatáspolitikai párthatározata nyomán 1965-ben indult meg az a korszerűsítési folyamat, amely többek között a szovjet tízosztályos középiskola reformját is magában foglalja. A matematikatanítás reformjának programját, módszertani alapelveit először egy szűkebb testület állította össze és sokszorosított formában vitára bocsátotta. A vita tapasztalatai alapján átdolgozott javaslatok a „Matyematyika v skolje" című folyóirat 1967-es évfolyamának első számában jelentek meg. Az új program kidolgozásakor követett néhány fontos alapelvet A. N. Kolmogorov akadémikus, a korszerűsítési munka egyik irányítója így fogalmazta meg:

„Egyik alapvető feladatunknak tartottuk a középiskolai matematika tananyag eszmei egységének megteremtését. Eközben a következő alapelveket tartottuk szem előtt:

1. mindenütt, ahol ez lehetséges, a tanulókat egyenes úton, korszerű és célravezető módszerekkel kell eljuttatni problémák és feladatok megoldásához;

2. új fogalmak bevezetésének szükségességét a tanulók számára elfogadható módon kell motiválni;

3. a tanulók munkáját úgy kell irányítani, hogy ők maguk is lássák munkájuk eredményét. Nem szabad az iskolának a tanulók memóriáját olyan fogalmakkal, tényekkel terhelni, amelyeket nem használnak fel az iskolai tananyagban, még azzal a jelszóval sem, hogy ezek valamikor hasznosak lesznek a tanulók számára."

Az új matematika-tanterv a 4. osztálytól a 10. osztályig egységes egészet alkot. A hagyományos témakörök mellett helyet kaptak benne olyan fontos új témakörök

is, mint például közelítő számítások, végtelen sorozatok, differenciál- és integrálszámítás, a valószínűségszámítás elemei, az analitikus térgeometria alapeszközei.

Érdemes itt röviden az óraszámokról is beszélni. A 7. osztályig a heti összes kötelező óraszám 31, a 8., 9. és 10. osztályokban pedig 32. Ebből a matematika óraszáma az elsőtől a 8. osztályig heti 6 óra, a 9. és 10. osztályokban heti 5 óra. Ez az óraszám kedvező lehetőséget nyújtott a tervezéshez, a mi fogalmazásunk szerinti „törzsanyag" elvégzéséhez. Új gimnáziumi tantervünk tervezetében szereplő fakultatív részhez hasonló — bár kisebb óraszámú — választható fakultatív órák a szovjet középiskolai tantervekben is helyet kaptak. Így 7.-ben heti 1, 8.-ban heti 2, 9. és 10. osztályban pedig heti 4 fakultatív óra választható összesen. A matematikát ebből a következő heti óraszámokban választhatják a tanulók: 7.-ben 1, 8.-ban 2, 9. és 10. osztályban pedig 2—2 óra. A 9. és 10. osztályos fakultatív órákhoz külön ajánlott tanterv is készült „A matematika kiegészítő kérdései és fejezetei" címmel.

A tantervek kidolgozásában, a hozzá kapcsolódó tankönyvek írásában, szerkesztésében akadémikusok, neves tudósok is részt vettek. Csak négy ismert nevet sorolok fel közülük: A. N. Kolmogorov, A. I. Markusevics, V. G. Boltyanszkij és I. M. Jaglom.

Az új tantervhez készült új tankönyvek igyekeztek a program szellemét jól megvalósítani. A gyakorlat tapasztalatai alapján, a bírálatokat figyelembe véve az újabb kiadásokban a szerzők átírták a vitatott részeket. A felsőbb osztályokban különkülön tankönyv készült az algebra és analízis elemei témakörből és geometriából. Így például a 10. osztály számára készült két tankönyv 1976-ban jelent meg. Az utóbbi két tankönyv részletes összefoglaló, szintetizáló fejezeteket tartalmaz az év végi ismétléshez. A geometria tankönyvből például az axiomatikus felépítésről is képet kaphatnak a tanulók. Érdekesek és újszerűek az egyes fejezetek végére beiktatott történeti összefoglalások, ismertetések.

A fakultatív tantervhez külön ajánlott tankönyvek jelentek meg. Ezek tulajdonképpen tanulmánygyűjtemények, az egy kötetben megjelent tanulmányok között olyanok is vannak, amelyek bevált, jól használható ismeretterjesztő, népszerűsítő könyvek egyes, a fakultatív tananyaggal foglalkozó részletei.

A „Matyematyika v skolje" című folyóirat hasábjain figyelemmel kísérhetjük a tanterv és a tankönyvek bevezetésének folyamatát. Gyakran találkozhatunk olyan cikkekkel, amelyek vitatják egy témának a tankönyv által adott feldolgozási módját, helyette más, célszerűbb utat javasolnak. Sok cikk foglalkozik az egyes új anyagrészek tanítása során szerzett tapasztalatok feldolgozásával. A reform tapasztalatainak átfogó értékelésére, összegezésére valószínűleg a közeljövőben kerül sor. Az értékelés — az eddigi tapasztalatok alapján nyugodtan mondhatjuk — reális lesz, figyelembe veszi az elért eredményeket, de feltárja a kijavításra váró hibákat is. Hiszen a reform irányítói és megvalósítói is világosan látják, soha nem lehet lezárni ezt a folyamatot: minden tapasztalat arra ösztönöz, hogy új, még jobb tantervet, korszerűbb, célravezetőbb módszereket találjanak.

HÓDI ENDRE
osztályvezető, OPI

Beszámoló a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpiáról

Dr. Vojin Dajović belgrádi egyetemi tanár, a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia szervező bizottságának elnöke f. évi április hó 6-i körlevelében, amelynek egy francia és egy német nyelvű példányát megküldte a Magyar Népköztársaság Oktatási Minisztériumának is, a következő tájékoztatást adta a diákolimpia szervezéséről:

1. A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia nemzetközi rendezvény a matematika területén. Belgrádban tartják 1977. július 1—13. között.

2. A diákolimpia munkaprogramból és kísérő tevékenységekből áll. A diákolimpia munkaprogramja az alábbiakból tevődik össze:

a) a tanulók matematikai feladatmegoldó versenyéből, amelyet július 6-án és 7-én két zárthelyi dolgozat keretében bonyolítanak le; a résztvevőknek mindegyik zárthelyi dolgozatban három feladatot kell megoldaniuk;

b) a versenyzők július 10-én tartandó szimpóziumából, amelynek tagozataiban a tanulók beszámolhatnak azokról a problémákról, amelyekkel az ifjú matematikusok foglalkoznak az egyes országokban, továbbá a saját maguk kitűzte feladatokról, azok megoldásáról és esetleges tudományos eredményeikről; ugyanitt mutatják be megoldásaikat a különdíjjal kitüntetett tanulók;

c) „A tehetséges fiatal matematikusok felkutatása és képességeik kibontakoztatása, továbbá a matematikatanítás reformja a középiskolákban" tárgyú szimpóziumból; a szervezők elgondolása szerint a küldöttségek vezetői részt vesznek majd ennek a szimpóziumnak a munkájában;

d) a zsürinek a diákolimpia programját előkészítő és megvalósító munkájából.

A kísérő tevékenységek csatlakoznak a diákolimpia programjához.

3. A részt vevő küldöttségek 8—8 középiskolai tanulóból állnak, akik 1957. július 5-e után születtek; valamint két vezetőből: a küldöttség vezetőjéből és annak helyetteséből.

A vezetők mindegyikének tudnia kell beszélni a diákolimpia hivatalos nyelvei: angol, francia, német és orosz közül legalább az egyiken.

4. A szervező országon kívül minden részvevő államnak jogában áll legfeljebb öt feladatot javasolni a versenyre. A feladatjavaslatokat megoldásukkal együtt 1977. május 20-ig kell beterjeszteni a szervező bizottságnak a diákolimpia egyik hivatalos nyelvén.

A diákolimpia versenyzőinek joguk van előadni közleményeiket, bemutatni feladataikat, problémáikat stb. a szimpóziumon. A közlemények rövid kivonatát, illetve a feladatok vagy problémák megfogalmazását 1977. június 15-ig kell megküldeni a szervező bizottságnak szintén a diákolimpia egyik hivatalos nyelvén.

A szervezők arra számítanak, hogy a küldöttségek vezetői saját beszámolójukkal vesznek részt az ő számukra rendezendő szimpóziumon, esetleg olyan más szerző beszámolójával, aki a szimpózium tárgykörével foglalkozik. A beszámolók összefoglalásának beküldésére ugyanazok az előírások érvényesek, mint a versenyzők szimpóziumával kapcsolatos küldeményekére.

5. A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia munkáját a szervező bizottság irányítja; a **2.***a)* pont alatti részt a diákolimpia zsürije; míg a **2.***b)* és **2.***c)* pontban részletezett tevékenységeket a szervező bizottság különleges bizottságai révén.

6. Szavazati joggal bíró zsüritag mindegyik küldöttségvezető és a zsüri elnöke. A zsüri munkájában részt vesznek a küldöttségek vezetőinek helyettesei is — akiknek a küldöttségvezető távollétében szavazati joguk van —, továbbá a zsüri titkára és a főkoordinátorok. Szükség esetén valamennyi koordinátor részt vesz a zsüri munkájában.

A zsüri munkája a diákolimpia hivatalos nyelvein bonyolódik le.

A zsüri egyszerű szótöbbséggel hozza határozatait. Szavazategyenlőség esetén a zsüri elnökének szavazata dönt.

7. A verseny feladatainak kiválasztása a részvevő országok beterjesztett javaslatai alapján történik. Az előzetes válogatást a szervező bizottság által kinevezett feladat-kiválasztó bizottság végzi. A zsüri feladata a végleges kiválasztás és a kiválasztott versenyfeladatok szövegének megfogalmazása mind a négy hivatalos nyelven.

A küldöttségek vezetői lefordítják a feladatok szövegét arra a nyelvre, amelyen tanulóik beszélnek. Ezeknek a fordításoknak tökéletesen egyezniük kell a hivatalos nyelvű feladatszövegekkel. Minden versenyző azon a nyelven kapja meg a feladatok teljes szövegét, amelyiken beszél.

A feladatok megoldásához mindkét nap 4—4 óra áll rendelkezésre. A versenyzők azon a nyelven oldják meg feladataikat, amelyiken beszélnek. Ha egy tanuló nem értette meg a feladatok szövegét, akkor a verseny első 30 percében kiegészítő írásbeli magyarázatot kaphat a zsüritől.

A dolgozatok megírásához szükséges papírról a szervezők, írószerekről pedig a versenyzők gondoskodnak.

8. Az összpontszámot és annak szétosztását az egyes feladatokra a zsüri állapítja meg. A versenyzők dolgozatait saját küldöttségük vezetője és annak helyettese vizsgálja felül. A követelmények egyöntetűségét egy csoport koordinátor biztosítja, akiket a szervező bizottság nevez ki.

Vitás esetekben a zsüri állapítja meg a végleges pontszámot. A jugoszláv tanulók feladatainak koordinálását azoknak a küldöttségeknek helyettes vezetői végzik, amelyek javasolták az illető versenyfeladatot.

A verseny legeredményesebb résztvevői díjakat kapnak egy-egy oklevél formájában, mégpedig I., II. vagy III. díjat. A díjazásban részesülők száma nem haladhatja meg az összes versenyző számának felét. Az I., II. és III. díjasok számának aránya lehetőleg 1:2:3 legyen. Egy-egy feladat sajátosan eredeti megoldásáért a koordinátorok javaslatára különdíj ítélhető meg.

Minden díjat a diákolimpia záróünnepélyén adnak át.

9. A tanulók szimpóziumának tagozataiban a munka a beérkező írásos anyagtól függ, valamint a különdíjjal kitüntetett megoldások számától és jellegétől.

A tagozatok számát és munkaprogramját a zsürivel egyetértésben a megfelelő bizottság állapítja meg. A közleményeket a diákolimpia valamelyik hivatalos nyelvén adják elő, emellett — amennyiben szükséges — szaktolmácsok is rendelkezésre állnak. A szervezőknek szándékukban áll, hogy a szimpózium anyagát külön kiadványban tegyék közzé.

10. A másik szimpózium munkáját szintén egy bizottság irányítja, amelyet ugyancsak a szervező bizottság jelöl ki. Ennek a szimpóziumnak a munkájában a küldöttségek vezetőin kívül bizonyos számú meghívott jugoszláv matematikus is részt vesz. Az a terv, hogy a szimpózium anyagát külön kiadványban jelentetik meg.

11. A szervező állam — a Jugoszláv Szocialista Szövetségi Köztársaság — viseli a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpián részt vevő valamennyi küldöttség tagjainak (8 tanuló és 2 vezető) teljes tartózkodási költségét a diákolimpia programjának megfelelően.

A részt vevő országok viselik küldöttségük utazási költségét Belgrádig és vissza, azonkívül minden olyan személy összes tartózkodási költségét, aki kíséri a küldöttséget.

A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpián részvevő magyar küldöttség vezetésével az Oktatási Minisztérium Középiskolai Főosztálya *Hódi Endrét*, az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Nevelési Osztályának vezetőjét bízta meg. A küldöttség helyettes vezetői teendőinek ellátására *dr. Reiman Istvánt*, a Budapesti Műszaki Egyetem ábrázoló geometriai tanszékének docense kapott megbízást. Hivatalos megfigyelőként részt vett a diákolimpián — az Oktatási Minisztérium költségén — *Csirmaz László*, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének tudományos munkatársa, akit a vendéglátók — közös megegyezés alapján — a magyar tanulókkal együtt szállásoltak el; a diákolimpia egész tartama alatt a tanulók programjában vett részt, kivéve természetesen a versenydolgozatok írását.

Nem tartozott ugyan a magyar küldöttséghez, de jelen volt a diákolimpián *dr. Fried Ervinné*, a Középiskolai Matematikai Lapok felelős szerkesztője (az Ifjúsági Lapkiadó Vállalat költségén).

A magyar versenyzőket dr. Reiman István készítette fel a diákolimpiára; ebben a munkájában Csirmaz László segített neki. A tanulók kiválasztását Hódi Endre közreműködésével ugyanők végezték. Ennek értelmében a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpián a következő tanulók képviselték hazánkat (zárójelben a rövidítésükre használt jelölések):

Balázs Iván József, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 1);

Bodó Zalán, a budapesti I. István Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 2);

Csikós Balázs, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója (H 3);

Homannay Géza, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 4);

Ivanyos Gábor, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 5);

Knebel István, a budapesti József Attila Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 6);

Magyar Zoltán, a budapesti Jedlik Ányos Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 7);

Seres Ákos, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 8).

Az osztályok megjelölése az 1976—77. tanévre vonatkozik.

A diákolimpián a zsüri programja a következő volt:

Július 1. A küldöttségek vezetőinek megérkezése Belgrádba. Utazás a zsüri munkájának színhelyére, Arand'elovacra.

Július 2. Az előzetesen kiválogatott feladatok szövegének és megoldásának átadása a küldöttségek vezetői részére.

9^h15^m—12^h: „Az ifjúság és a matematika" elnevezésű szimpózium első ülése.

15^h15^m—18^h: A szimpózium második ülése.

20^h: A szervező bizottság és a zsüri társas együttléte.

Július 3. 8^h30^m—12^h: A zsüri ülése.

16^h—19^h: A zsüri ülése.

Július 4. 8^h30^m—12^h30^m: A zsüri ülése. A versenyfeladatok végleges kiválasztása.

16^h—19^h: A zsüri ülése. A kiválasztott feladatok szövegének lefordítása a diákolimpia négy hivatalos nyelvére. A feladatok elosztása a két versenynapra.

Július 5. 7^h30^m—12^h30^m: A zsüri ülése. A kiválasztott feladatok szövegének lefordítása a versenyzők anyanyelvére.

14^h: Kirándulás. A reszavai cseppkőbarlang és a Manaszija kolostor megtekintése.

Július 6. 6^h30^m: Indulás Belgrádba.

8^h30^m: A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia ünnepélyes megnyitása.

9^h—9^h30^m: A versenyzők írásban feltett kérdéseinek megválaszolása.

10^h—12^h: Városnézés Belgrádban.

12^h—13^h: A belgrádi egyetem prorektorának fogadása.

13^h30^m: Visszautazás Arand'elovacra.

16^h—17^h: A zsüri és a koordinátorok együttes ülése. Irányelvek megállapítása a részleges feladatmegoldások pontozására.

17^h: Az első napi versenydolgozatok átvétele, majd javítása.

Július 7. 6^h30^m: Indulás Belgrádba.

8^h30^m: Második versenynap. A versenyzők írásban feltett kérdéseinek megválaszolása.

9^h30^m: Visszautazás Arand'elovacra. A versenydolgozatok javítása. Az első napi dolgozatok javítása koordinálásának megkezdése.

Július 8. A versenydolgozatok javítása és a javítások koordinálása.

Július 9. A versenydolgozatok javítása és a javítások koordinálása.

A koordinálás befejezése.

A zsüri záróülése.

20^h: Közös vacsora.

Július 10. 8^h—10^h: A zsüri záróülésének folytatása.

Utazás Belgrádba.

16^h—19^h: A tanulók szimpóziumának második ülése.

Július 11. Egész napos kirándulás szárnyashajókkal a vaskapui vízierőműhöz. Közös ebéd Karatašban.

Július 12. 11^h—12^h30^m: Belgrád város polgármesterének fogadása.

18^h: A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia záróünnepélye.

20^h: A diákolimpia záróbankettje a belgrádi Úttörővárosban.

Július 13. A küldöttségek hazautazása.

A küldöttségek programja az alábbi volt:

Július 4. A küldöttségek és helyettes vezetőik megérkezése Belgrádba.

A tanulók elszállásolása az Úttörővárosban.

A helyettes vezetők utazása Arand'elovacra.

Július 5. Egész nap szabad időtöltés.

Július 6. 8^h30^m: A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia ünnepélyes megnyitása.

9^h—13^h: A diákolimpia első napi versenyfeladatainak megoldása.

Délután szabad időtöltés.

Július 7. 8^h30^m—12^h30^m: A diákolimpia második napi versenyfeladatainak megoldása.

Délután szabad időtöltés.

Július 8. 8^h30^m—12^h30^m: Városnézés Belgrádban. A Kalemegdan és a modern művészet múzeumának megtekintése.

15^h—17^h30^m: Sakkdélután.

19^h: Találkozás belgrádi fiatalokkal. Ifjú zenészek hangversenye.

Július 9. Egész napos kirándulás. A reszavai cseppkőbarlang és a Manaszija kolostor megtekintése.

Július 10. 9^h—12^h: A tanulók szimpóziumának első ülése.

16^h—19^h: A tanulók szimpóziumának második ülése.

Július 11. Egész napos kirándulás szárnyashajókkal a vaskapui vízierőműhöz. Közös ebéd Karatašban.

Július 12. Délelőtt és délután szabad időtöltés.

18^h: A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia záróünnepélye.

20^h: A diákolimpia záróbankettja a belgrádi Úttörővárosban.

Július 13. A küldöttségek hazautazása.

Most nézzük meg kissé részletesebben az egyes programpontokat!

A zsüri munkájának színhelye: Arand'elovac kis fürdőváros Belgrádtól 88 km-re, nagyjából déli irányban. A zsüri tagjainak elszállásolása a városka legjobb (B kategóriájú) szállodájában: a Hotel Sztaro Zdanyeban történt kétágyas, zuhanyozóval is ellátott szobákban. Ugyanennek a szállónak és a szomszédos Šumadija szállodának egyes helyiségeiben végezte a zsüri munkáját. A szállók körüli szép park egészséges és megfelelő környezetet biztosított ehhez a munkához.

Odaérkezésünkkor tudtuk meg, hogy a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpián 21 állam képviselteti magát küldöttséggel. A részvevő államok a jelölésükre használt rövidítések betűrendjében a következők:

Osztrák Köztársaság (A),
Belga Királyság (B),
Bolgár Népköztársaság (BG),
Kubai Köztársaság (C),
Csehszlovák Szocialista Köztársaság (CS),
Német Szövetségi Köztársaság (D),
Német Demokratikus Köztársaság (DDR),

Algériai Köztársaság (DZ),
Francia Köztársaság (F),
Nagy-Britannia és Észak-Írország Egyesült Királyság (GB),
Magyar Népköztársaság (H),
Olasz Köztársaság (I),
Mongol Népköztársaság (M),
Holland Királyság (NL),
Lengyel Népköztársaság (PL),
Román Szocialista Köztársaság (R),
Svéd Királyság (S),
Finn Köztársaság (SF),
Szovjet Szocialista Köztársaságok Szövetsége (SU),
Amerikai Egyesült Államok (USA),
Jugoszláv Szocialista Szövetségi Köztársaság (YU).

Különböző okok miatt az algériai küldöttség csak 3, a belga 7, a kubai 4 és az olasz 5 tanulóból állt; a többi küldöttség teljes volt. Ez azt jelenti, hogy a mostani diákolimpián 4 földrész 21 országának összesen 155 tanulója vett részt. Az előbbi mondat mindhárom számadata egy-egy új rekordot jelent a nemzetközi matematikai diákolimpiák történetében annak bizonyítékául, hogy mennyire növekszik az érdeklődés ez iránt a nemzetközi verseny iránt.

A diákolimpiának 4 leányversenyzője volt, mégpedig az algériai, a belga, a bolgár és a mongol küldöttség egy-egy tagja.

Valójában még két állam képviseltette magát ezen a diákolimpián: Brazília megfigyelővel, név szerint Dr. Rosa Feldmann-nal, aki magyar származású, és annak ellenére, hogy 44 éve él São Pauloban, ma is jól beszél anyanyelvén; továbbá Vietnam, amelynek nyilvánvaló szándéka volt versenyzőket is küldeni, hiszen feladatjavaslatokat is terjesztett be, közülük az egyiket ki is tűzte a zsüri.

A kép akkor lesz teljes, ha megmondjuk, hogy még 7 állam volt: Albánia, Görögország, India, Mexikó, Norvégia, Spanyolország és Törökország, amelyek vagy meghívást kaptak a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpiára, vagy pedig maguktól érdeklődtek a diákolimpia iránt, ezért számolni lehet azzal, hogy közülük némelyek rövidesen szintén bekapcsolódnak ezekbe a versenyekbe.

Ami „Az ifjúság és a matematika" elnevezésű szimpóziumot illeti, ezzel kapcsolatban csak az előadók és előadásuk címének felsorolására szorítkozunk, a beszámolók időrendjét követve.

Prof. Dr. Gustav Burosch (DDR): A matematikából tehetséges tanulókkal való foglalkozás a Német Demokratikus Köztársaságban.

Anatolij Pavlovics Szavin (SU): A matematikából kiváló tanulók fejlődésének elősegítése a Szovjetunióban.

Hódi Endre (H): A magyarországi általános iskolák új matematika-tantervének fokozatos bevezetésével kapcsolatban eddig szerzett tapasztalatok.

Petar Kenderov (BG): A nemzetközi matematikai diákolimpiák hatása a részvevő országok matematikaoktatásának fejlődésére.

Orlov (YU): Hogyan lehet kedvet ébreszteni a tanulókban a matematikához a numerikus és grafikus módszerekkel?

Robert C. Lyness (GB): A témák megválasztásának befolyása a matematikai tanulmányi versenyeken elért eredményre.

Denis Gerll (F): A franciaországi tanulmányi versenyekről.

Thomas Mühlgassner (A): Tevékenységek a matematikatanítás megjavítására Ausztriában.

Jozef Moravčik (CS): Az ifjú matematikusokkal való foglalkozások néhány formája Csehszlovákiában.

Joan Cuculescu (R): A valószínűségszámítás korszerű tanítása.

Prof. Dr. Samuel L. Greitzer (USA): A tanulmányi versenyek hatása a matematikaoktatásra.

Prof. Dr. Milica Ilić-Dajović (YU): A matematikából tehetséges tanulók felkutatása és kiválasztása (tanulmányi versenyekre, illetve továbbtanulásra).

A zsüri első ülésén, július 3-án délelőtt tudtuk meg, hogy a feladatkiválasztó bizottsághoz 13 országból összesen 54 feladatjavaslat érkezett be, közülük az utolsók Csehszlovákiából június 27-én.

Ezek között szerepelt az a három magyar feladatjavaslat is, amelyeket az Ury László, V. éves matematikus szakos egyetemi hallgató vezette bizottság állított össze, és magyar szövegüket Hódi Endre fordította németre.

A jugoszláv feladatkiválasztó bizottság az 54 feladatjavaslat közül a neki legjobban tetsző tizenhatot választotta ki. Ezek szövegét minden zsüritag megkapta, mégpedig a diákolimpia valamennyi hivatalos nyelvén, megoldásukat azonban általában csak azon a nyelven, amelyen a javaslattevők fogalmazták meg. A 16 feladat közül 1-et Bulgária, 1-et Csehszlovákia, 3-at a Német Szövetségi Köztársaság, 1-et a Német Demokratikus Köztársaság, 2-t Nagy-Britannia, 1-et Magyarország, 3-at Hollandia, 1-et Lengyelország, 1-et Finnország, végül 2-t Vietnam küldöttsége terjesztett be. A zsüritagok a javaslattevők megoldását kapták meg, bár a jugoszláv feladatkiválasztó bizottságnak más meg-

oldásai is voltak egyes, általuk előzetesen kiválogatott feladatokra.

A Dr. Milica Ilić-Dajović, belgrádi egyetemi tanár elnökletével ülésező zsüri azután ebből a 16 feladatból választotta ki hosszas vita után szótöbbséggel a verseny két napjára kitűzött 3—3 feladatot.

A zsüri döntése értelmében az első versenynapra olyan három feladatot tűztek ki, amelyek rendre a holland, a vietnami, illetve ugyancsak a holland küldöttség javaslatai közül valók voltak, és hibátlan megoldásukkal a tanulók sorjában 6, 6, illetőleg 7 pontot szerezhettek.

A második versenynap feladatait rendre az angol, a nyugatnémet és a bolgár küldöttség terjesztette be; kifogástalan megoldásukért 6, 7 és 8 pont járt.

A feladatok magyar szövege a következő:

Első nap

1. Adott $ABCD$ négyzet oldalaira befelé megrajzoljuk az ABK, BCL, CDM és DAN egyenlő oldalú háromszögeket.

Bizonyítsuk be, hogy a KL, LM, MN és NK szakaszok felezőpontjai az AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN és AN szakaszok felezőpontjaival együtt egy szabályos tizenkétszög csúcspontjai!

2. Egy valós számokból álló véges sorozatban bármely 7, közvetlenül egymást követő tag összege negatív; míg bármely 11, közvetlenül egymást követő tag összege pozitív.

Állapítsuk meg egy ilyen sorozatban a tagok számának maximumát!

3. Legyen n adott, 2-nél nagyobb természetes szám! Jelöljük V_n-nel azt a halmazt, amelynek elemei: $1+kn$, ahol $k=1, 2, \ldots$. Egy $m \in V_n$ számot *V_n-ben felbonthatatlannak* mondunk, ha nincsenek olyan $p, q \in V_n$ számok, amelyekre $pq=m$.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan $r \in V_n$ szám, amely több, mint egyféleképpen állítható elő V_n-ben felbonthatatlan számok szorzataként!

(Azokat a felbontásokat, amelyek csak a V_n-ből vett tényezők sorrendjében különböznek egymástól, azonosaknak vesszük.)

Második nap

4. Legyenek a, b, A és B adott valós számok, továbbá legyen $f(x)=1-a\cdot\cos x-b\cdot\sin x-A\cdot\cos 2x-B\cdot\sin 2x$. Ismeretes, hogy x minden valós értéke esetén $f(x)\geqq 0$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$a^2+b^2 \leqq 2 \quad \text{és} \quad A^2+B^2 \leqq 1.$$

5. Legyenek a és b pozitív egész számok! Ha (a^2+b^2)-et elosztjuk $(a+b)$-vel, a hányados q, a maradék pedig r lesz. Állapítsuk meg az összes olyan (a, b) számpárt, amelyre

$$q^2+r = 1977.$$

6. Legyen f olyan függvény, amely értelmezve van minden n természetes számra, és amelynek függvényértékei is természetes számok! Álljon fenn továbbá az

$$f(n+1) > f(f(n))$$

egyenlőtlenség ugyancsak minden n-re!

Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden n természetes számra:

$$f(n) = n.$$

A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia ünnepélyes megnyitására a belgrádi Úttörőváros színháztermében került sor. A megnyitó ünnepség — nagyon helyesen — elég rövid volt: Dr. Vojin Dajović professzornak, a diákolimpia szervező bizottsága elnökének a jelenlevőket üdvözlő szavai után Dr. Milica Ilić-Dajović, a zsüri elnöke tömören összefoglalta a nemzetközi matematikai diákolimpiák célját és jelentőségét, majd felsorolta azokat az álla-

mokat, amelyek elküldték versenyzőiket erre a diákolimpiára. Ezt követően ismét Dr. Vojin Dajović professzor vette át a szót: megnyitottnak nyilvánította a diákolimpiát, sikert kívánt a versenyzőknek és felszólította őket, hogy foglalják el helyüket az egyes termekben.

Az első napra kitűzött feladatok szövegével kapcsolatban egyetlen magyar tanulónak sem volt kérdése.

A második napra kitűzött feladatok szövegével kapcsolatban három magyar tanuló tett fel kérdést írásban. Kettő aziránt érdeklődött, hogy a 6. feladatban a 0-t természetes számnak kell-e tekinteni. Bár a feladat megoldása szempontjából ez közömbös volt, a zsüri határozata értelmében ezek a tanulók nemleges választ kaptak kérdésükre. A harmadik tanuló hibára gyanakodott a 4. feladatban az egyenlőtlenségek irányát illetően, mivel az első egyenlőtlenség ellenkező irányú, mint a másik kettő. Bár a szövegben, amelyet a tanuló megkapott, az egyenlőtlenségek kiírása helyes volt, megnyugtatása céljából a zsüri hozzájárult ahhoz, hogy a magyar küldöttség vezetője még egyszer felírja számára a 4. feladatban szereplő három egyenlőtlenséget.

A koordináció munkájáról annyit jegyezhetünk meg, hogy a 12 fiatal koordinátor komoly felelősségtudattal igyekezett ellátni nehéz feladatát: szakértelmükhöz, igazságosságukhoz és pártatlanságukhoz nem fér kétség; a különböző feladatokat, illetve azok megoldását is körülbelül azonos szigorúsággal bírálták el, de úgy véljük, hogy általában valamivel szigorúbb mérce helyénvalóbb lett volna. Bizonyos mértékű gyakorlatlanságukra utal az a tény, hogy meglehetősen sok vitás kérdés maradt a koordinálással kapcsolatban a zsüri záróülésére, ami nem mondható éppen szerencsésnek.

Mivel a magyar tanulók dolgozatainak elbírálását illetően minden kérdésben sikerült megegyezni a koordinátorokkal, a koordinálás befejeztével elkészíthettük a következő táblázatot, amely azt tünteti fel, hogy versenyzőink hány pontot értek el az egyes feladatok megoldásában:

A tanuló	1.	2.	3.	4.	5.	6.	összes pontjának száma
	feladatban elért pontjainak száma						
H 1	4	1	7	6	5	0	23
H 2	6	1	0	6	3	1	17
H 3	6	3	0	1	0	3	13
H 4	6	1	7	0	7	8	29
H 5	0	3	7	0	0	0	10
H 6	6	2	7	6	7	3	31
H 7	6	6	7	6	1	8	34
H 8	6	6	7	6	7	1	33
Összesen:	40	23	42	31	30	24	190

A verseny valamennyi résztvevője által elért összpontszámokat második táblázatunk tartalmazza (l. a következő oldalon):

Ennek a táblázatnak a kialakulása után a zsüri záróülésének még három napirendi pontja volt: a verseny díjasainak megállapítása, a különdíjak odaítélése és a következő diákolimpiát rendező állam kijelölése.

Tekintettel arra, hogy legalább 17 pontot összesen 77 tanuló ért el, és ez a szám még éppen nem haladta meg a versenyzők számának felét, ezért a zsüri csakhamar megállapodott abban, hogy 77 tanuló részesüljön díjazásban. Már nehezebb volt megvonni a határt az I. és II., illetve a II. és III. díjasok között. Hosszas vita után a zsüri végül is a magyar küldöttség vezetőjének erre vonatkozó javaslatát fogadta el, amelynek értelmében

I. díjat kapnak azok, akik legalább 34 pontot szereztek;

II. díjasok lesznek azok, akiknek összes pontszáma legalább 24, legfeljebb pedig 33; végül

III. díjban részesülnek azok a versenyzők, akik legalább 17, legfeljebb pedig 23 pontot értek el.

A zsürinek e döntése alapján a magyar tanulók közül Magyar Zoltán 34 ponttal I., Seress Ákos 33 ponttal, Knebel István 31 ponttal és Homonnay Géza 29 ponttal II., végül Balázs Iván József 23 ponttal és Bodó Zalán 17 ponttal III. díjat kapott.

Harmadik táblázatunk (a 105. oldalon) azt tünteti fel, hogyan oszlottak meg a díjak a részvevő államok küldöttségei között.

Második és harmadik táblázatunkkal kapcsolatban meg kell említenünk, hogy az utolsó oszlopban szereplő helyezési számokat csupán áttekintés céljából adtuk meg, azok semmiképpen sem jelentenek hivatalos értékelési sor-

Sorszám	Az állam jele	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8. tanuló	Valamennyi tanuló együttes pontszáma	Helyezés
1.	A	24	22	40	18	12	14	14	7	151	XII.
2.	B	2	0	1	12	2	9	7	—	33	XIX.
3.	BG	30	19	27	16	13	29	21	17	172	VI.
4.	C	13	8	7	13	—	—	—	—	41	XVIII.
5.	CS	19	28	16	33	26	3	15	21	161	IX.
6.	D	12	26	36	17	21	20	12	21	165	VII.
7.	DDR	21	34	15	5	34	26	14	14	163	VIII.
8.	DZ	2	14	1	—	—	—	—	—	17	XXI.
9.	F	15	16	4	35	11	16	16	13	126	XIV.
10.	GB	29	25	13	28	17	20	40	18	190	III—IV.
11.	H	23	17	13	29	10	31	34	33	190	III—IV.
12.	I	6	5	1	2	8	—	—	—	22	XX.
13.	M	6	5	3	5	8	3	5	14	49	XVII.
14.	NL	8	22	16	33	39	19	26	22	185	V.
15.	PL	36	12	9	22	24	12	18	24	157	XI.
16.	R	12	10	5	20	14	13	27	21	122	XV.
17.	S	20	8	9	24	34	9	21	12	137	XIII.
18.	SF	21	14	9	6	5	16	7	10	88	XVI.
19.	SU	24	23	22	21	31	10	40	21	192	II.
20.	USA	40	6	26	40	26	21	30	13	202	I.
21.	YU	19	30	19	24	12	14	24	17	159	X.

rendet a részvevő államok küldöttségei között. Ilyen hivatalos értékelési sorrend elvileg nincs a nemzetközi matematikai diákolimpiákon, mert azok egyéni versenyek. Hiányos küldöttségek esetén pedig még kevésbé lenne ildomos ilyesmiről beszélni.

Sorszám	Az állam jele	I.	II. díj száma	III.	valamennyi	Helyezés
1.	A	1	1	2	4	IX—X.
2.	B	0	0	0	0	XVII—XXI.
3.	BG	0	3	3	6	XII—XIII.
4.	C	0	0	0	0	XVII—XXI.
5.	CS	0	3	2	5	XIV.
6.	D	1	1	4	6	VIII.
7.	DDR	2	1	1	4	II.
8.	DZ	0	0	0	0	XVII—XXI.
9.	F	1	0	0	1	XI.
10.	GB	1	3	3	7	III.
11.	H	1	3	2	6	IV.
12.	I	0	0	0	0	XVII—XXI.
13.	M	0	0	0	0	XVII—XXI.
14.	NL	1	2	3	6	VI.
15.	PL	1	2	2	5	VII.
16.	R	0	1	2	3	XV.
17.	S	1	1	2	4	IX—X.
18.	SF	0	0	1	1	XVI.
19.	SU	1	2	4	7	V.
20.	USA	2	3	1	6	I.
21.	YU	0	3	3	6	XII—XIII.

A koordinátorok az 1., 4. és 5. feladat megoldásával kapcsolatban senkit sem javasoltak a zsüri különdíjára. A 2. feladat különösen szellemes megoldásáért a CS 1 jelű, általánosításáért pedig a GB 7 jelű versenyzőnek javasoltak különdíjat. (Ez az általánosítás következőképpen hangzott: Ha egy valós számokból álló véges sorozatban bármely p, közvetlenül egy-

mást követő tag összege negatív, míg bármely q, közvetlenül egymást követő tag összege pozitív, akkor ennek a sorozatnak legfeljebb $p+q-(p, q)-1$ tagja lehet, ahol (p, q) jelenti a p és q szám legnagyobb közös osztóját.) A javaslatot a zsüri elfogadta.

A 3. feladat megoldására a koordinátorok véleménye szerint öt versenyző: a BG 6, GB 7, H 5, H 7 és SU 5 jelű adott olyan megoldást, amelynek alapján részükre különdíj odaítélését indítványozták. Az odaítélésről egyenként szavaztak. Ennek során a H 7 jelű versenyző számára nem szavazták meg a különdíjat. A zsürinek ez a határozata nyilvánvalóan hibás volt. Lényegében a nagyszámú javaslattal indokolták állásfoglalásukat, továbbá azzal, hogy H 7 egyébként is kapott díjat, H 5 pedig nem, és elég lesz a magyaroknak egy különdíj is. Maga a megoldás semmiképpen sem nyújtott erre alapot.

Amit a 6. feladat megoldására adandó különdíjak javasolásával csináltak, az már egészen szokatlan volt. Először az SU 7 jelű versenyző megoldását ismertették röviden a koordinátorok, majd miután ez nem kapta meg a zsüritől a különdíj odaítéléséhez szükséges számú szavazatot, a többi — eredetileg bemutatásra tervezett — megoldást, közöttük ismét a H 7 jelű versenyzőét, nem is ismertették a zsürivel.

A magyar küldöttség vezetői a különdíjak odaítélésével kapcsolatos eljárásból azt a következtetést vonták le, hogy a jövőben nem látszik célszerűnek beiktatni a diákolimpiák programjába hasonló értékelést, mivel az utóbbi néhány évben e tekintetben több helytelen, szubjektív határozat született.

A különdíjak odaítélésének befejezése után Dr. Joan Cuculescu, a bukaresti egyetem docense, a román küldöttség vezetője kért szót. Bejelentette, hogy a XX. (jubileumi) diákolimpiát Románia — ezeknek a versenyeknek a kezdeményezője — kívánja megrendezni 1978-ban, és erre a diákolimpiára meghívja mindazoknak az államoknak a küldöttségét, amelyek a XIX.-en képviseltették magukat. Ezt a bejelentést a zsüri ülésének résztvevői egyhangú helyesléssel vették tudomásul.

A XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia záróünnepélyét ugyanabban a teremben rendezték, ahol az ünnepélyes megnyitó is volt.

Dr. Vojin Dajović professzor megnyitó szavai után Salih Nuši, a jugoszláv dolgozó nép szocialista szövetségének vezetője emelkedett szólásra. Beszédében hangoztatta a tudományok, közöttük a matematika korunkban megnövekedett társadalmi fontosságát. Köszönetet mondott jól végzett munkájukért mindazoknak, akik közreműködtek ennek a diákolimpiának sikeres lebonyolításában. Gratulált a verseny győzteseinek, végül annak a meggyőződésének adott kifejezést, hogy ez a nemes verseny is hozzájárul a részvevő országok matematikaoktatásának fejlődéséhez.

Ezután dr. Bogoljub Stanković professzor, akadémikus, a Jugoszláv Matematikusok, Fizikusok és Csillagászok Szövetségének — a diákolimpiát rendező társadalmi szervezetnek — főtitkára beszélt. Beszédében utalt arra a kölcsönhatásra, amely a matematika és a többi tudomány között áll fenn. Ez a napjainkban mindinkább fokozódó kölcsönhatás szükséges része a társadalmi haladásnak. A matematika főként a kreativitásra neveléssel, a találékonyság fejlesztésével, széles matematikai kultúra nyújtásával járul hozzá ehhez. Szólt a nemzetközi matematikai diákolimpiák humanisztikus hatásáról is, amennyiben ezek a versenyek lehetőséget adnak a különböző országok leendő matematikusainak egymás megismerésére, egymás problémáinak jobb megértésére, aminek igen nagy a jelentősége, hiszen többek között az ő feladatuk is lesz egy szebb, jobb világ kiépítése a jövőben.

Stanković akadémikus nagy tetszéssel fogadott beszédét zeneszám követte: Aleksandr Toškov fiatal zongoraművész Chopin G-moll balladáját adta elő. Produkcióját a záróünnepély közönsége hosszan tartó tapssal jutalmazta.

Utána Dr. Milica Ilić-Dajović, a zsüri elnöke kiosztotta az okleveleket a verseny díjazottjainak.

A záróünnepély utolsó mozzanata Dr. Joan Cuculescu egyetemi docensnek, a román küldöttség vezetőjének a diákolimpia valamennyi hivatalos nyelvén elmondott felszólalása volt. Ebben először is a zsüri tagjainak nevében köszönetet mondott a vendéglátóknak a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpia színvonalas megszervezéséért és eredményes lefolytatásáért, modellként tekintve azt a további hasonló diákolimpiák megrendezéséhez. Külön foglalkozott a mostani versenyen kitűzött feladatokkal, és megállapította, hogy azok egyrészt magas színvonalúak voltak, másrészt alkalmasak a mélyebb matematikai tudás megvizsgálására. A diákolimpia eredményeit igazságosaknak minősítette, ezt elsősorban a zsüri elnöke és a koordinátorok jó munkájának tulajdonította. John Rickard (GB 7 jelű) angol versenyzőt külön is kiemelte rendkívüli teljesítményéért: megszerezte az elérhető legnagyobb pontszámot, ezenkívül két különdíjat is kapott. Végül megismételte a zsüri záróülésén tett bejelentését a XX. nemzetközi matematikai diákolimpia megrendezéséről.

Az ünnepély Dr. Vojin Dajović professzor zárószavaival ért véget.

A küldöttségek vezetői Belgrádban az A kategóriájú Metropol szállóban voltak elszállásolva kétágyas szobákban, míg a tanulók az Úttörővárosban 4—5 ágyas szobákban. A versenyekre szintén az Úttörőváros területén levő, nemrégiben épült kultúrcentrumban került sor. Július 5-én az egyik magyar versenyző, Csikós Balázs megbetegedett, és kétséges volt, hogy részt tud-e venni a másnapi versenyen. Végü is

részt vett, mindkét napon lázasan, különösen az első versenynapon volt magas láza. Helytállása feltétlenül méltánylást érdemel, hiszen teljesítményét minden bizonnyal erősen befolyásolta kedvezőtlen egészségi állapota.

A verseny lefolytatásával kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy az eddigi gyakorlattól eltérően néhány versenyzőnek alkalma volt arra, hogy a dolgozat írásakor zsebszámológépet, illetve táblázatot használjon. (Erről a zsüri csak utólag értesült.) Az ilyen segédeszközök használata feltétlenül előnyhöz juttatta a versenyzőt, különösen az 5. feladat megoldásában.

Csütörtök és péntek délután került sor egy kieséses asztalitenisz-versenyre, amelyet egy svéd versenyző nyert meg. Ugyancsak péntek délután egy jugoszláv nemzetközi mester szimultán sakkversenyt játszott a diákolimpia résztvevőivel. 17 táblán csak 3 játszmát vesztett. Ugyanaznap este a belgrádi zeneiskola három növendéke kisebb hangversenyt adott a versenyzők tiszteletére a kultúrcentrum színháztermében. Ezután muzsikálni tudó versenyzőket kértek fel a koncert folytatására. Egy francia és egy osztrák fiú zongorázott, egy román pedig gitározott: semmiben sem maradtak el a zeneiskolások mögött, igazi zenei élményt nyújtottak.

A július 9-i egész napos kirándulás említésre méltó eseménye volt az a kétóra hosszat tartó vacsora, amelyet a markovaci Sztari Hraszt motelben adtak. A vacsorán jugoszláv ételkülönlegességeket szolgáltak fel.

Néhány szó a tanulók szimpóziumáról, amelyet első ízben tartottak nemzetközi matematikai diákolimpián. Délelőtt a versenyzők mondhatták el — előzetes jelentkezés alapján — a matematika különféle ágaiban elért eredményeiket, délután pedig a különdíjat kapott versenyzők ismertették megoldásaikat a többiekkel. A szimpózium előadásai mindkét alkalommal két teremben folytak. Délelőtt 5—5 előadás hangzott el. Néhány címszó: Egy speciális típusú permutáció ciklusokra bontásáról. Az $x^2-4xy+y^2+1=0$ diofantikus egyenlet megoldásairól. Az általánosított Morley-tétel. Az előadásokon elsősorban nyelvi nehézségek adódtak: sem az előadók, sem a hallgatók nem ismerték kellőképpen a diákolimpia hivatalos nyelveit, továbbá tolmácsolásról lényegében szó sem volt. Az előadások címét is csak az utolsó pillanatban ismertették. Komolyabb eredményről csupán az egyik szovjet versenyző számolt be, aki bebizonyította, hogy a prímszámok közti különbségek között valamelyik szám végtelen sokszor fordul elő. Az elhangzott előadásokat egy jugoszláv matematikai folyóirat ismertetni fogja. A tanulók szimpóziumán szerzett vegyes benyomásaink miatt nem tudjuk egyértelműen támogatni ennek a kezdeményezésnek a folytatását.

Már az előzőkben is értékeltük egyes szempontokból a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpiát. Most kiegészítjük ezt néhány újabb szemponttal, de teljességre természetesen nem törekedhetünk. Ez a diákolimpia feltétlenül a jobban szervezettek közé tartozik. Szakmailag magas színvonalú volt, de valamivel talán alatta maradt a XVIII-nak. Társasági program tekintetében szolidnak minősül. Mivel a szervezők viszonylag rövid időre meglehetősen sok szakmai programot irányoztak elő, ezért a zsúfoltság miatt a részvétel kissé megerőltető volt a küldöttségek vezetői számára.

Kétségtelen, hogy a diákolimpia lebonyolítói mindent megtettek a siker érdekében: ez éppúgy érvényes szakmai tevékenységükre, mint vendéglátásukra. Mindössze talán annyit jegyezhetünk meg, hogy a zsüri munkájának irányításában — ami feltétlenül nagy tudást, széles látókört és rátermettséget igényel — néhány esetben tapasztaltunk nem megfelelő elintézésmódot. Ilyen volt pl. az, amikor a jugoszláv tanulók 2. feladatra készített megoldásainak koordinálására a csehszlovák küldöttség vezetőjét, 3. feladatra készített megoldásainak koordinálására pedig a holland küldöttség (a feladat kitűzőjének) vezetője helyett a lengyel küldöttség vezetőjét „jelölték ki". Szerencsére ezeknek az eseteknek a száma kevés volt; a diákolimpia szakmai programjának lefolytatására nem ezek voltak jellemzők.

Ami a magyar versenyzők e diákolimpián nyújtott teljesítményét illeti, azzal elégedettek lehetünk, figyelembe véve egyrészt, hogy ezt megelőzően értünk el már jobb eredményt is, másrészt viszont, hogy az előkészítő munka során szerzett tapasztalatok alapján ennél gyengébb eredményre számítottunk. Tanulóink teljesítményének javulását mutatja, hogy ebben az évben csupán 12 ponttal maradtak el a legjobb együttes összpontszámától, míg egy évvel ezelőtt ez a különbség 90 pont volt.

Mivel azonban második táblázatunk tanúsága szerint a diákolimpia mezőnye ez alkalommal olyan szoros volt, annyira közel kerültek egymáshoz a különböző államok csapatainak összpontszámai, mint eddig még soha, ebből a tényből okvetlenül le kell vonnunk a megfelelő következtetést, mégpedig azt, hogy csakis az előkészítő munka szélesítésével és hatékonyságának növelésével tarthatjuk meg helyünket a legjobbak között a következő nemzetközi matematikai diákolimpiákon. Néhány ponttal kevesebb teljesítmény már több hellyel hátravethet. Annál inkább gondolni kell erre, mert jövőre legfeljebb két olyan tanulónk lehet, akik már részt vettek ilyen versenyen.

Befejezésképpen azonban még egyszer hangsúlyoznunk kell, hogy a XIX. nemzetközi matematikai diákolimpián részt vevő magyar diákok becsülettel helytálltak és szép sikert könyvelhetnek el maguknak.

HÓDI ENDRE
osztályvezető, OPI

Megemlékezés Carl Friedrich Gaussról

Ebben az évben — április 30-án — volt 200 esztendeje annak, hogy Braunschweig városában megszületett Carl Friedrich Gauss, minden idők egyik legnagyobb matematikusa.

Egészen egyszerű családból származott. Apja: Gebhard Dietrich Gauss egész sor különféle foglalkozást volt kénytelen űzni; így többek között volt utcai mészáros, kertész, kőműves és egy biztosító pénztárosa. Gauss anyja — leánykori nevén Dorothea Benze — házassága előtt, amely férjének második házassága volt, cselédként dolgozott. Csak egyetlen gyermekük született: Carl Friedrich. Gauss derék és megbecsült emberként, valamint jó számolóként jellemezte apját, aki azonban otthon meglehetősen parancsolgatólag és nyersen viselkedett.

Gauss matematikai tehetsége nagyon korán megmutatkozott. Később egyszer maga mondta, hogy előbb tanult meg számolni, mint beszélni. Mások viszont azt beszélték róla, hogy hároméves korában egyszer jelen volt, amikor apja éppen bérelszámolást végzett, abban hibát fedezett fel és azonnal megadta a helyes eredményt is. Szinte köztudott, hogy kilenc vagy tíz éves korában a népiskolában néhány pillanat alatt következőképpen számította ki az 1-től 100-ig terjedő egész számok összegét:

$$1+2+\ldots+100 = (1+100)+(2+99)+\ldots$$

$$\ldots+(50+51) = 50\cdot 101 = 5050,$$

azaz rábukkant a (véges) számtani sor összegezésének elvére.

Tanítói csakhamar felfigyeltek rá. Mindenekelőtt Büttner nevű tanítójának segítőtársa, Bartels, aki csak nyolc évvel volt idősebb Gaussnál és sokat foglalkozott matematikával, érdeklődött iránta és támogatta nagyon hatékonyan Gauss matematikai fejlődését. Gauss 1788-ban a népiskolából a Catharineum elnevezésű gimnáziumba ment tanulmányainak folytatása céljából. Bartels, aki ugyanakkor a Collegium Carolinumban, a későbbi műszaki főiskolán kapott állást, majd Kazánban és Tartuban volt matematikatanár, figyelemmel kísérte Gausst. Gauss azonban nemcsak matematikai teljesítményeivel tűnt fel, hanem az idegen nyelvekben való gyors előrehaladásával is, és ezért is von Zimmermann 1791-ben bemutatta őt Braunschweig uralkodó hercegének, aki ösztöndíjat adott neki, hogy gimnáziumba járhasson, később egyetemi tanulmányokat folytathasson Göttingenben, sőt folyamatosan még tovább is, egészen addig, míg 1807-ben Gauss a csillagászat professzora és a göttingeni csillagvizsgáló igazgatója nem lett.

Addig Gauss már régen kiemelkedő matematikusnak bizonyult. 1791-ben két pozitív valós szám: a és b számtani-mértani közepével foglalkozott. Ez pontosabban annak a sorozatnak konvergencia-vizsgálatát jelenti, amelynek első két eleme: a, b; a harmadik: $a'=\frac{a+b}{2}$; a negyedik: $b'=\sqrt{ab}$; majd azt az eljárást, amellyel az első két elemből a következő kettőhöz jutottunk, korlátlanul ismételve kapjuk a sorozat további tagjait.

A következő évben a táblázatban található törzsszámok megszámlálása révén sikerült megsejtenie a törzsszámok eloszlására vonatkozó tételt: tudniillik azt, hogy az x-nél kisebb törzsszámok száma aszimptotikusan $\frac{x}{\ln x}$-szel egyenlő, amit csak több, mint 100 évvel később — a függvénytan hosszú fejlődése után — tudtak bebizonyítani.

Azonkívül foglalkozott a párhuzamosok axiómájával is. Már akkor, tehát 15 éves korában vizsgálatokat végzett arra vonatkozólag, hogy milyen lehet egy geometria, ha nem érvényes benne a párhuzamosok axiómája.

1795-től 1798-ig Gauss Göttingenben tanult, mégpedig először matematikát és filológiát. Arra a végleges elhatározására, hogy kizárólag matematikát tanuljon, csak 1796-ban jutott, amikor felfedezte, hogy mely szabályos sokszögek szerkeszthetők körzővel és vonalzóval. Ezzel olyan problémát oldott meg, amely az ókori matematika óta egy lépéssel sem jutott közelebb a megoldáshoz.

A szabályos 17-szög szerkesztésének bejelentése volt Gauss első tudományos közleménye, és ennek a felfedezésnek napjától kezdve vezette tudományos naplóját, amelybe sok éven keresztül bejegyezte legfontosabb eredményeit. Amíg Gauss a szabályos 17-szög szerkesztésére vonatkozó közleményében habozás nélkül használta a komplex számokat, addig doktori értekezésében rendszeresen kerülte azokat, mert akkor még nem nyertek „polgárjogot" a matematikában. Disszertációjában egyébként az első szigorú bizonyítást adta a klasszikus algebra alaptételére, amely valós számok segítségével megfogalmazva azt mondja ki, hogy minden valós együtthatójú polinom felbontható első- és másodfokú ugyanilyen polinomok szorzatára. Ezzel doktorált 1799 végén Helmstedtben, mégpedig távollétében; azonban Johann Friedrich Pfaff, az ottani matematikus meghívta néhány hónapos tartózkodásra, ami nagyon harmonikusan és termékenyen telt el.

Időközben Gauss olyat alkotott, amely bízvást egyedülálló a matematika történetében: 1796-tól 1798-ig, tehát 19-től 21 éves koráig megírta első könyvét, a Disquisitiones arithmeticae-t (Aritmetikai értekezések). Egészen addig a számelmélet voltaképpen számos érdekes, szép és nagyrészt igazán mélyenfekvő eredmény gyűjteménye volt, ezek az eredmények azonban alig függtek össze egymással. Erre Leonhard Euler nagyon gazdag tartalmú és rendkívül élénk stílusban megírt Vollständige Anleitung zur Algebra (Teljes bevezetés az algebrába) c. könyve nyújt mintapéldát. A Disquisitiones arithmeticae azonban egy csapásra egységes és rendszeres tudománnyá tette a számelméletet; a kongruenciák elméletében (1. főrész) olyan világos és szilárd alapot kapott, amelyre biztosan rá lehetett építeni a másodfokú alakok elméletét (2. főrész) és a körosztás problémáját (3. főrész).

A 2. és 3. főrészben ugyan hosszú és bonyolult számítások, valamint nehéz számolási becslések találhatók, ezért szinte csodálatos, hogy egyáltalán érdekes eredmények jöttek ki belőlük. De ha valaki alaposabban tanulmányozza ezt a munkát, akkor felismeri, hogy milyen mély strukturális gondolkodás rejtőzik mögötte, amellyel először motiválja a kérdések feltevését és a feltételezéseket, s amelynek révén áttekinthetővé válnak a számítások.

A Disquisitiones arithmeticae nyomtatása alatt, amely 1801-ig elhúzódott, Gauss azzal foglalkozott, hogy kiépítse az elliptikus függvények, a ϑ-sorok és a moduláris függvények elméletét, anélkül azonban, hogy bármit is nyilvánosságra hozott volna abból. Később más matematikusok, mint például Abel és Jacobi, éveken keresztül dolgozták fel Gausstól függetlenül ugyanezt az elméletet. Gauss tartózkodása talán azzal magyarázható, hogy elmélete még nem felelt meg elvének: Pauca sed matura (Keveset, de kiérleltet), a régi görögöknél szokásos matematikai szigorúságnak, valamint annak, „ut nihil amplius desiderandum relictum sit" (hogy semmi kívánni való ne maradjon hátra); valószínűleg hiányát érezte még általánosabb törvényszerűségek közé történő besorolásnak.

1801-ben azután a Disquisitiones arithmeticae megjelenését követőleg Gauss világhírnévre tett szert a matematikusok között, és a Pétervári Akadémia levelező tagjává választotta.

Ugyanebben az esztendőben kezdte meg csillagászati működését, világhírneve így általánossá vált. A 19. század „újévének", 1801. január 1-ének éjszakáján Giuseppe Piazzi olasz csillagásznak sikerült megfigyelnie a Ceres nevű első kisbolygót, amely azonban 40 napon át történt észlelés után ismét eltűnt a csillagászok szeme elől. Az akkori csillagászok még nem tudtak valamennyire is pontosan megállapítani egy pályát ilyen kevés adatból. Gauss hozzáfogott ennek a problémának a tanulmányozásához és új módszereket dolgozott ki, hogy csupán három megfigyelésből számítson ki egy, a Kepler-féle bolygómozgásnak megfelelő pályát. Mivel azonban több észlelés állt rendelkezésére, megvolt rá a lehetősége, hogy alkalmazza kiegyenlítő-számítási elveit, és olyan pontosan határozta meg a pályaelemeket, hogy 1801 végén s 1802 elején több csillagász újra meg tudta találni a Cerest. Amikor ezeket a számításokat tartalmazó könyvének kéziratát Gauss elküldte a kiadónak, azt írta kísérőül, hogy ezt a könyvet még századok múltán is tanulmányozni fogják. Állítása beigazolódott: a pályameghatározás még ma is a Gauss-féle módszerekkel történik, a számítás menete természetesen módosult az elektronikus számítógépek felhasználása miatt.

Ettől kezdve a csillagászat és a számelmélet egyenlő mértékben kötötte le Gausst. Egyrészt a matematikát a tudományok királynőjének és a számelméletet a matematika királynőjének nevezte, de másrészt — amint azt ifjúkori barátjához, Bolyai Farkashoz 1803. június 20-án írt levelében fejezte ki — a tiszta mennyiségtant (a számelméletet) és a csillagászatot tudományos munkássága két pólusának tekintette, „amelyek felé fordul mindig az én szellemi iránytűm". Azonkívül a két tudomány annyiban is kiegészítette számára egymást, minthogy ismerte a számelmélet csekély alkalmazási lehetőségét, azzal akarta kimutatni háláját államával szemben — amely anyagilag támogatta számelméleti kutatásait — hogy minden erejével foglalkozott olyan dolgokkal is, melyek közvetlen gyakorlati hasznot hoztak.

1803-ban meghívták egyetemi tanárnak Pétervárra, Gauss azonban nem fogadta el ezt a meghívást, mert a braunschweigi herceg javított anyagi helyzetén és kilátásba helyezte, hogy csillagvizsgálót is épít saját használatára. A herceg azonban 1806-ban halálosan megsebesült a Napoleon ellen Jena és Auerstädt mellett vívott csatában. 1807-ben lett egyetemi tanár Gauss Göttingenben, és ezt az állását élete végéig megtartotta.

Gauss 1805-ben kötötte első házasságát a braunschweigi Johanna Osthoff-fal. Első fia, aki 1806-ban született, tüzértiszt lett, majd műszaki főtanácsos a hannoveri vasútigazgatóságon. Gaussnak 1808-ban született első leánya 1830-ban férjhez ment Heinrich Ewald professzorhoz, jelentős göttingeni nyelvészhez, aki 1837-ben Tübingenbe költözött, ott felesége már 1840-ben meghalt. Ewald egyike volt a „Göttingeni Hetek"-nek, azaz egy a közül a hét göttingeni egyetemi tanár közül, akik 1837-ben megtagadták a hűségesküt a királytól, amikor az az új alkotmányt hatályon kívül helyezte és a régi reakciósat állította vissza. Erre a tiltakozásra a király a hét professzor elbocsátásával válaszolt.

Nem sokkal harmadik gyermekük megszületése után, 1809-ben meghalt Gauss felesége, és a gyermek is csak néhány hónappal élte túl őt. E súlyos csapás ellenére a gyermekek miatt Gauss már a következő évben újra megnősült: Wilhelmine Waldeck-et, egy göttingeni jogászprofesszor leányát vette feleségül. Ebből a házasságából két gyermeke született: 1811-ben egy fiú, akit apja a „mihaszna" jelzővel illetett; ez 1830-ban Amerikába vándorolt és ott is halt meg 1896-ban mint jómódú farmer; az 1816-ban született Therese apja házánál maradt és annak haláláig gondozta őt. Gauss második felesége ugyanis már 1831-ben meghalt. Therese is csupán kilenc évvel élte túl apját. Említésre méltó, hogy Gauss anyja 75 éves korában fiához költözött, annak a csillagvizsgálóban levő szolgálati lakásába, ahol még 22 évig élt.

Már 1799-ben egyetemi hallgató korában szakmai tanácsért fordultak Gausshoz a vesztfáliai földmérés során. 1818-ban minisztériumi megbízást kapott a hannoveri háromszögelés elvégzésére.

Gauss azonban nem érte be azzal, hogy egy ekkora területet mérjen fel, hanem fölöttébb érdekelte a föld alakjának az egész világra kiterjedő földmérés útján való megállapítása. Ez a törekvése indította arra, hogy két fontos elméleti témakörrel foglalkozzék, mégpedig elsősorban a tér egy felületének egy másikra történő konform (arány- és szögtartó) leképezései kérdésével, továbbá azzal a kérdéssel, hogy milyen következtetéseket lehet levonni a térbeli felületek alakjára azoknak a méréseknek az eredményeiből, amelyek csak az illető felületeken levő görbék hosszára és a velük bezárt szögekre vonatkoznak. Azok a felületek, amelyek nyújtás nélkül egymásba hajlíthatók, nem különböznek egymástól metrikájukra nézve; egy felületnek az új Gauss-féle „belső geometriája" tehát görbületi változókkal foglalkozik.

Gaussnak a csillagászat és a geodézia iránti érdeklődésével igen szoros kapcsolatban voltak potenciálelméleti kutatásai. Mindenekelőtt 1813-ban egy speciális problémát tárgyalt, mégpedig egy általános homogén ellipszoid vonzásának — addig még csak hiányosan megválaszolt — kérdését, amelyhez integráltételeket használt.

Külföldi újságok rendszeres olvasása, amelyek egy göttingeni olvasóteremben voltak kitéve, ahhoz a lehetőséghez juttatták Gausst, hogy rendszeresen értékelje a tőzsdei híreket, majd ennek alapján sikeres tőzsdei ügyleteket kössön; ebből származó bevételei lényegesen meghaladták göttingeni egyetemi tanári fizetését. Másrészt 1845-től 1850-ig nagyon hosszadalmas vizsgálatokat és számításokat végzett a göttingeni professzorok özvegyei pénztárának újjászervezésével kapcsolatban, mely nehéz helyzetbe került, mert 1844-ben erősen megnövekedett az egyetemi tanárok özvegyeinek száma, és nem tudták kifizetni a tervbe vett nyugdíjakat.

Előzőleg említettük, hogy Gauss már 15 éves korában foglalkozott olyan geometria tulajdonságainak vizsgálatával, amelyben Euklidész valamennyi axiómája érvényes a párhuzamosok axiómájának kivételével. Már az ókortól kezdve megkísérelték a párhuzamosok axiómáját — annak különleges szerkezete miatt — levezetni a többi axiómából. Minden vélt bizonyítás azonban ott mondott csődöt, hogy valamely észrevétlen helyen felhasznált egy magától értetődő tényt, például hogy van tetszőlegesen nagy területű háromszög, de ez valójában csak a párhuzamosok axiómájának segítségével bizonyítható be. Gauss egész sor ilyen hibát tárt fel.

Mivel addig nem sikerült közvetlenül bebizonyítani, hogy a párhuzamosok axiómája következménye a többi euklidészi axiómának, meg lehetett kísérelni olyan geometria felépítését, amelyben egy egyenesen kívül levő ponton legalább két egyenes megy keresztül úgy, hogy nem metszik az illető egyenest — mindezt abban a reményben, hogy ez majd ellentmondásra vezet. Gauss azonban ilyen vizsgálatai során egyre tovább jutott és annyira érdekes és messzemenő eredményeket kapott, hogy mindinkább meggyőződésévé vált: egy ilyen geometria önmagában ellentmondásmentes lehet. Erről semmit sem hozott nyilvánosságra.

Ellenkezőleg: néhány bizalmas ismerősét, akikkel közölte erre vonatkozó nézeteit, arra kérte, hogy a tőle hallottakat tartsák teljesen titokban, mert félt a „böotiaiak" (maradi gondolkodású, nehézkes és műveletlen ógörög néptörzs) ordítozásától. Óva intette őket attól, hogy ilyen gondolatokat tegyenek közzé, mert ezek — ahogyan Christian Ludwig Gerlinghez írt egyik levelében kifejezte — egy darázsfészket bolygatnának fel. A 19. század elején két fiatal matematikus egymástól függetlenül és körülbelül egyidejűleg kidolgozta a nem-euklidészi geometriát, és munkájukat nyilvánosságra is hozták.

A magyar Bolyai János, aki Bolyai Farkasnak, Gauss egyik — még egyetemi hallgató korában megismert — barátjának fia volt, nem törődve apjának intelmeivel, hogy ne vesztegesse idejét a párhuzamosok axiómájának tanulmányozásával, 1823 végén megtalálta a megoldást, amely a nem-euklidészi geometria létezésének kimutatásában állt, és eredményeit apjának 1831-ben megjelent könyve egyik függelékeként tette közzé; emiatt röviden csak Appendix néven idézik. Mivel akkor Európában kolerajárvány volt, az Appendix a szétzilált postai kapcsolatok miatt csak 1832-ben került Gauss kezébe, aki nem sokkal ezután következőképpen nyilatkozott róla Gerlingnek:

„Még megjegyzem, hogy ezekben a napokban egy kis dolgozatot kaptam Magyarország-

ról, amely a nem-euklidészi geometriáról szól, és amelyben igen elegánsan kifejtve újra megtalálom valamennyi saját gondolatomat s ötletemet, bár olyan formában, amely a figyelem erős összpontosításának igénye miatt kissé nehezen követhető annak számára, aki nem jártas a dologban.... Ezt a fiatal geométert, von Bolyait rendkívüli lángelmének tartom."

Kevéssel később Gauss ezt írta Bolyai János apjának:

„Most valamit Fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, hogy nekem nem szabad ilyesmit dicsérnem, akkor bizonyára meghökkensz majd egy pillanatra, de nem tehetek másként; őt dicsérni azt jelentené, mintha magamat dicsérném: ugyanis a dolgozat egész tartalma, az az út, amelyre Fiad tért, és azok az eredmények, melyekhez eljutott, szinte teljesen megegyeznek saját, részben már 30—35 éve folytatott elmélkedéseimmel."

A fiatal Bolyaira természetesen lesújtóan hatott ez a levél, és különösen Magyarországon nagyon rossz néven vették Gauss ilyetén való reagálását.

Oroszországban, Kazán városában egy másik matematikus, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij lépett a nyilvánosság elé a nem-euklidészi geometriára vonatkozó közleményeivel. Ő is már 1823 óta birtokában volt a geometria alapjainak, 1826-ban előadást tartott róla a Kazáni Tudományos Társaságban és 1829-ben A geometria kezdeténekmegalapozásáról címmel orosz nyelven nyomtatásban is megjelentette első, ilyen tárgyú munkáját.

Lobacsevszkij munkái csak lassan jutottak el a német egyetemekre, és mivel oroszul voltak írva, nehezen lehetett hozzájuk férni. Közülük az elsők csupán körülbelül 1841-től kezdődően jutottak Gauss tudomására. Gauss azonnal felfogta ezeknek a publikációknak jelentőségét, és hogy pontosabban tudja tanulmányozni azokat, elkezdett oroszul tanulni — méghozzá igen sikeresen. Ezt szellemi rugalmassága próbatételének is tekintette, hiszen már életének hetedik évtizedében tartott.

1828-ban Gauss Alexander von Humboldt vendégeként Berlinben részt vett természettudományos kutatók nagy összejövetelén, ahol kapcsolatba került Wilhelm Weber fizikussal. Ebből a kapcsolatból, Webernek 1831-ben Göttingenbe történő meghívása után, szoros együttműködés alakult ki közöttük. Első közös témájuk a földmágnesség volt. Bár megszervezték a Föld mágneses terének az egész világra kiterjedő megfigyelését, Gauss számára az elméleti hódítások jelentették a fő sikert. Mindamellett új észlelési módszerek kidolgozására is törekedett, amelyek a mérési pontosság lényeges növelését eredményezték. (A magnetométer feltalálása.) Gauss és Weber 1833-ban közösen találták fel az elektromágneses távírót, amelyet mindjárt fel is használtak hírszolgálatra a fizikai intézet és a csillagvizsgáló között.

Más fizikai munkái a mechanikára vonatkoztak, ahol Gauss felállította a legkisebb kényszer elvét; továbbá az optikára, ahol lényegesen megjavította fénysugaraknak lencserendszeren való áthaladására vonatkozó addig használatos számítási módszereit.

Gauss szinte kizárólag írásos munkái révén fejtett ki hatást korának matematikusaira. Az előadásokkal szemben nagy idegenkedést tanúsított, nem voltak közvetlen matematikus tanítványai, és matematikus kollégáival folytatott levelezése is rendkívül csekély volt ahhoz az igen kiterjedt levélváltáshoz képest, amely közötte és csillagász ismerősei, valamint barátai között történt.

Így doktorrá avatásának 50. évfordulójára 1849-ben is csupán két matematikus, Dirichlet és Jacobi jött Göttingenbe.

Ez alkalommal Göttingen város díszpolgárává avatták; ennek jobban örült, mint annak a sok megtiszteltetésnek, amelyben mintegy 50 esztendőn keresztül részesült más egyetemekre történt meghívások — azonban Göttingenben maradt — és tudományos akadémiákba, valamint tudós társaságokba való beválasztása formájában. 1850—51. téli félévében még előadásokat tartott a legkisebb négyzetek módszeréről; kevés hallgatója közé tartozott az akkor 19 esztendős Dedekind, akire Gauss egész egyénisége igen mély benyomást tett. A következő években egyre rosszabbodott Gauss egészségi állapota, mígnem 1855. február 23-án eltávozott az élők sorából.

Halála után a hannoveri király rendeletére olyan érmeket vertek, amelyeken Gausst a „Princeps mathematicorum" (a matematikusok fejedelme) elnevezéssel illették. Ezt a címet — mondhatni — általánosan is elismerték. De — mint láttuk — Gauss nemcsak a legnagyobb matematikusok, hanem egyáltalán a legnagyobb tudósok egyikének is tekinthető.

Irodalom: Carl Friedrich Gauss. 1777 bis 1855. alpha Mathematische Schülerzeitschrift. 11. Jahrgang 1977. Nr. 1. Ss. 1—3.

Prof. Dr. sc. nat. Hans Wussing: Carl Friedrich Gauss. 2. Auflage. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1976.

SZABÓ KÁLMÁN
egyetemi hallgató
Miskolc

Algebrai egyenlőtlenségek megoldása geometriai úton

Tekintsük az $x^2+y^2 \leqq n$ egyenlőtlenséget, ahol n pozitív egész szám! Keressük az egész számok körében a fenti egyenlőtlenség megoldásainak számát. Ha n értéke nem túlságosan nagy, akkor algebrai úton egyszerűen megoldható a probléma. Például $n=2$ esetén 9 megoldás van. Ezek: $x=0$, $y=0$;

$$x=0, y=1;\quad x=0, y=-1;\quad x=1, y=0;$$

$$x=-1, y=0;\quad x=1,\ y=1;$$

$$x=-1, y=1;\quad x=1, y=-1;\quad x=-1,$$

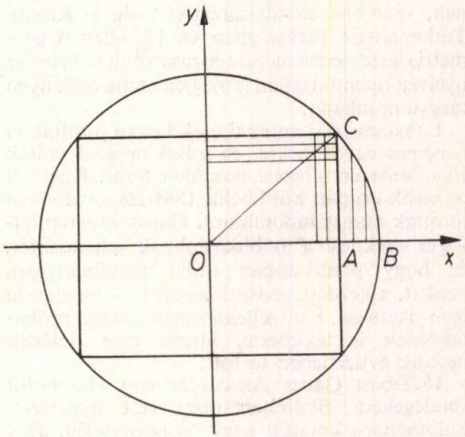
$$y=-1.$$

Azonban ha már nagy n-nel, például $n=100$-zal próbálkozunk, akkor a fenti eljárás bonyolulttá válik, nem célszerű azt használni. Az x^2+y^2 forma egy origó középpontú kör egyenletére emlékeztet, ezért azt sugallja, hogy próbáljunk a felvetett kérdésnek geometriai értelmezést adni és úgy megoldani a problémát. A geometriai értelmezés segítségével — mint látni fogjuk — valóban egyszerűbbé válik a probléma megoldása.

Vegyünk fel a síkon egy x, y derékszögű koordináta-rendszert és ebben egy origó középpontú, $\sqrt{n}$ sugarú kört. Így a síknak azok a pontjai, amelyek rajta vannak a kör kerületén, kielégítik az $x^2+y^2=n$ egyenletet. A síknak azok a pontjai pedig, amelyek kielégítik az $x^2+y^2<n$ egyenlőtlenséget, a kör belsejében vannak. Így feladatunknak az egész számok körében annyi megoldása van, ahány egész koordinátájú pont van a felvett kör belsejében vagy határán. Az ilyen pontokat — tehát azokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám — rácspontoknak nevezzük. Az alábbiakban a felvetett problémát egy adott n értékre oldjuk meg, de bármely más n-re az eljárás szinte szó szerint ugyanígy alkalmazható.

Legyen tehát pl. $n=100$.

Írjunk az adott körbe — melynek egyenlete tehát $x^2+y^2=100$ — négyzetet úgy, hogy a négyzet oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak legyenek.



A rácspontokat az így felosztott kör részeiben és a határvonalakon számláljuk meg. A négyzet oldalai az $x=\pm\sqrt{50}$, $y=\pm\sqrt{50}$ egyenletű egyenesek, ezeken nincs rácspont, mert 50 nem négyzetszám. $8>\sqrt{50}>7$, tehát a négyzet belsejében találhatók mindazok a rácspontok, amelyek mindkét koordinátájának abszolút értéke nem nagyobb 7-nél, ezek száma $(2\cdot 7+1)^2=225$.

A körszeleteket felében kettévágó négy

szakasz mindegyikén ugyanannyi rácspont van. Az x tengely pozitív felén levő AB szakasz első rácspontjának abszcisszája az előbbiek szerint 8, az utolsóé 10, mert $\sqrt{n}=10$; így ezen a szakaszon három rácspont van, a négy szakaszon pedig $4 \cdot 3=12$.

A továbbiakban meghatározzuk az ABC félkörszelet belsejében és a BC íven levő rácspontok számát. Ebből az ABC idomból a kör még nem tekintett 7 része az origó körüli 90°-os forgatásokkal, a tengelyeken és a tengelyek OC felezőjén való tükrözésekkel állítható elő. Mivel minden ilyen transzformáció a rácspontokat is rácspontokba viszi át, ezért a megmaradt 7 rész mindegyikén ugyanannyi rácspont van, mint az ABC idomon. Az ABC idom említett rácspontjait a rajtuk átmenő, az y tengellyel párhuzamos $x=8, 9, 10$ egyenletű egyenesek szerint csoportosítva számláljuk meg. Ehhez az alábbi táblázatban közöljük a BC íven levő metszéspontjuk $y=\sqrt{100-x^2}$ ordinátáját, így rácspontjaik k száma mindig y egész része.

x	x^2	$y^2=100-x^2$	y	k
8	64	36	6	6
9	81	19	$\sqrt{19}$	4
10	100	0	0	0

A k oszlopban álló számok összege 10, ezért a körben levő rácspontok száma:

$$N=225+12+8 \cdot 10=317.$$

Tehát az $x^2+y^2 \leqq 100$ egyenlőtlenségnek 317 egész megoldása van. Tekintsük néhány konkrét n-re a megoldások N számát, és képezzük az N/n hányadost:

n	N	N/n
0	1	—
1	5	5
2	9	4,5
3	9	3
4	13	3,25
5	21	4,2
10	37	3,7
50	161	3,22
100	317	3,17
1000	3149	3,149

A szakirodalomból jól ismert, hogy ez az N/n hányados egy meghatározott számhoz, a $\pi=3{,}14159\ldots$ számhoz tart. Ezt geometriai megfontolásokkal nem túl nehéz igazolni, felhasználva, hogy a koordináta-rendszerbe egy elég nagy konvex idomot helyezve a benne levő rácspontok száma és az idom területének mértékszáma közelítőleg egyenlők.

Most nézzük a feladatot három ismeretlenre: Az $x^2+y^2+z^2 \leqq n$ egyenlőtlenségnek hány megoldása van az egész számok körében?

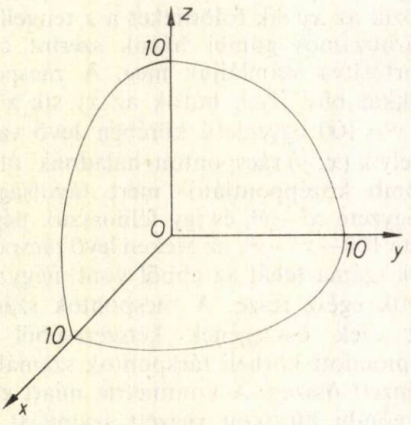
Itt nem célunk ezt tetszőleges n-re megmondani, de bemutatunk egy eljárást, amelyet bármely n értékre ugyanúgy alkalmazhatunk. Legyen ebben az esetben is $n=100$.

Írjunk a térbeli derékszögű koordináta-rendszer origója körül egy 10 egységnyi sugarú gömböt! Kérdés: hány rácspont van a gömb felületén és belsejében? A gömbfelület pontjaira nézve $x^2+y^2+z^2=100$, a belső pontokra pedig $x^2+y^2+z^2<100$. A rácspontok közül az xy sík fölöttieket a z tengellyel párhuzamos gömbi húrok szerint csoportosítva számláljuk meg. A rácspontokkal bíró ilyen húrok az xy sík $x^2+y^2=100$ egyenletű körében levő valamelyik $(x; y)$ rácsponton haladnak át, a gömb középpontjától mért távolságuk négyzete x^2+y^2, és így félhosszuk négyzete $100-x^2-y^2$, az ezeken levő rácspontok száma tehát az ebből vont négyzetgyök egész része. A rácspontok száma az ezek összegének kétszereséből és a mondott körbeli rácspontok számából képzett összeg. A szimmetria miatt elég a gömbi húrokon végzett számítást az $x \geqq y \geqq 0$ pontokra, a kör 1/8 részében és a határoló sugarakon levő rácspon-

tokra elvégezni, majd a körcikk belsejében levő rácspontokat 8-szor, a sugarakon levőket 4—4-szer kell venni, az origó fölöttit pedig egyszer. Ezt a számítást elvégezve kapjuk, hogy a két sugár rácspontjaihoz írt számok összege 48, illetve 69, együtt 117; a körcikk belsejében 181 rácspont van, ennélfogva a felső félgömb belsejében és felületén levő rácspontok száma $1 \cdot 10 + 4 \cdot 117 + 8 \cdot 181 = 1926$. Vagyis az összes rácspont száma $2 \cdot 1926 + 317 = 4169$. Tehát az $x^2+y^2+z^2 \leqq 100$ egyenlőtlenségnek 4169 egész megoldása van.

Ebben az esetben is belátható, hogy a koordináta-rendszerbe egy elég nagy konvex testet helyezve, a benne levő rácspontok száma közelítőleg egyenlő a test térfogatának mértékszámával. Így a megoldások száma közelítőleg a $\sqrt{n}$ sugarú gömb térfogatával egyenlő, azaz $\frac{4}{3} \cdot \pi n \cdot \sqrt{n}$. Esetünkben ez 4188, ami elég közel áll a fentebbi számítással kapott eredményhez. Mint láttuk, a fenti eredményeket csak algebrai úton elég nehéz lett volna meghatározni.

A továbbiakban általánosításokat keresünk. Kézenfekvő általánosítás, hogy az $x^2+y^2+z^2+t^2 \leqq n$ egyenlőtlenség megoldásait határozzuk meg az egész számok körében.



Az első esetben a megoldások N száma közelítőleg megegyezett az origó középpontú, $\sqrt{n}$ sugarú kör területével, azaz ekkor $N_1 \approx n \cdot \pi$. A második esetben a gömb térfogatát vettük figyelembe, azaz akkor $N_2 \approx \frac{4}{3} \pi n \sqrt{n}$. Négy ismeretlen esetében az (x, y, z, t) számnégyest olyan tér pontjainak kell tekinteni, amelynek négy dimenziója van. Azaz ekkor N közelítőleg a négydimenziós gömb térfogatával egyenlő, tehát $N_3 \approx \frac{\pi^2 \cdot n^2}{2}$. Ezt az általánosítási formát még tovább folytatva, azaz öt, hat, ..., p ismeretlenre vizsgálva a problémát, kapjuk, hogy p ismeretlen esetén N közelítőleg a p-dimenziós gömb térfogatával egyenlő. Ekkor egyenlőtlenségünk az $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_p^2 \leqq n$ alakot veszi fel.

Befejezésül bemutatunk egy másik általánosítási formát is. Vegye fel egyenlőtlenségünk az $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqq n$ alakot — ahol a, b, c adott valós számok — és a fenti egyenlőtlenség egész megoldásainak számát keressük. Ez a már közölt eljáráshoz hasonlóan végezhető el. Végül néhány — e témával kapcsolatos — feladat megoldását javasoljuk az érdeklődő olvasónak:

1. Határozzuk meg az alábbi egyenlőtlenség egész megoldásainak számát:
   $9x^2+9y^2+9z^2-6x-6y+z \leqq 900$.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha N jelöli az $x^2+y^2 \leqq n$ egyenlőtlenség egész megoldásainak számát — n pozitív egész szám — akkor $\lim_{n \to \infty} N/n = \pi$.
3. Hány megoldása van az egész számok körében az alábbi egyenlőtlenségnek: $x^2+y^2+z^2+t^2 \leqq 1977$?

Helyesbítés

Nemrégiben jelent meg „A közismereti tantárgyak megújítása a szakmunkásképzési célú szakközépiskolákban" című OPI kiadvány. Ebben a matematikáról szóló cikkben a sokszorosítás során sajnálatos módon minden grafikai jel kimaradt. A szöveg helyes értelmezése szempontjából fontos korrekciókat az alábbiakban közöljük.

— Az 59. oldalon felülről az 5. sorban helyesen: 1986/87.

— Az egyes témakörökben *kiegészítő anyagként* szerepelnek az alábbi témák (a kéziratban szögletes zárójel jelölte ezeket):

Ponthalmazok: A háromszöghöz írt körök. Ponthalmazok jellemzése rendezett számhármasokkal. Egyszerűbb speciális helyzetű térbeli ponthalmazok jellemzése Descartes-féle koordinátáik segítségével. (Pl. síkok, téglatestek.)

Függvények: $[x]$; $\{x\}=x-[x]$; sgn x; x^n ($n>0$ és egész). Az ezekkel kibővített függvényhalmaz elemeiből az alapműveletek és a függvényösszetétel segítségével előállítható függvények. Az így kapott függvények ábrázolása.

Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek: Egyenlőtlenség-rendszerek, paraméteres egyenlőtlenségek, paraméteres egyenlőtlenség-rendszerek.

Hatványozás, törtek: A számelmélet alaptétele. Paraméteres törtes egyenletek. Számrendszerek; kiemelve a gyakorlati alkalmazások szempontjából legfontosabb tízes és kettes számrendszert.

Lineáris egyenletrendszerek: A lineáris kétismeretlenes egyenlet- és egyenlőtlenség-rendszerek grafikus megoldása. A grafikus megoldás korlátai. Többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek.

Egyenesre vonatkozó tükrözés: Tükrözés síkra vonatkozóan. Fixpontok. A tükrözés tulajdonságai. Síkra szimmetrikus alakzatok.

Pontra vonatkozó tükrözés: Térbeli középpontos tükrözés.

Eltolás, vektorok: Szerkesztések. Térbeli feladatok.

Pitagorasz tétele, négyzetgyök, a számfogalom általánosítása: Iterációs módszer számok négyzetgyökének közelítő kiszámítására. A felvetődő problémák kicsit mélyebb megvilágítása: A racionális számok halmaza mindenütt sűrű. A számegyenes racionális pontjainak összessége (a racionális számoknak megfelelő pontok) nem meríti ki a teljes számegyenest. Léteznek összemérhetetlen szakaszok is. Az irracionális számok jellemzésének nehézségei. Számossági kérdések. A valós számok halmaza már ekvivalens az egyenes pontjainak halmazával.

Pont körüli elforgatás: Adott szakaszhoz és szöghöz tartozó látókör szerkesztése.

Középpontos hasonlóság és alkalmazásai: A háromszög belső szögfelezői a másik két oldal arányában osztják a szemközti oldalt. Szerkesztési feladatok. Harmonikus közép. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakasz hossza mértani közepe bármely, ugyanebből a pontból húzott szelő két szeletének.

Szögfüggvények általánosítása: A ctg x függvény.

A komplex szám fogalma. A komplex számok ábrázolása. A komplex számok kanonikus és trigonometrikus alakja. Műveletek.

Másodfokú függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek: Másodfokúra visszavezethető egyenlőtlenségek. Paraméteres másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek. Négyzetgyökös egyenlőtlenségek. Másodfokú egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszerek.

Folyamatábrák. Információ és információ-hordozók. A vezérlés és szabályozás alapfogalmai. A programvezérlés elve.

Hatvány, gyök, logaritmus: Az irracionális kitevőre kiterjesztett hatványfogalom csak kitekintésjelleggel.

Áttérés egyik alapszámú logaritmusról egy másik alapszámúra. Exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek. A logarléc használata. A számítási segédeszközök használata.

Trigonometriai feladatok. Egyenletek, egyenletrendszerek: Vektorok skaláris szorzata. A skaláris szorzás tulajdonságai. A skaláris szorzat kiszámítása a vektor-koordináták segítségével.

Trigonometrikus, exponenciális, logaritmikus egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek.

Trigonometrikus összegek szorzattá alakítása.

Koordináta-geometria: Adott ponton átmenő, adott normálvektorú egyenes egyenlete.

Adott egyenes által létrehozott félsíkok jellemzése egyenlőtlenségekkel. Egyenesszakaszok és félegyenesek által határolt tartományok jellemzése egyenlőtlenség-rendszerekkel. A lineáris programozás néhány problémája.

Tartományok jellemzése egyenlőtlenség-rendszerekkel.

Infinitezimális módszert igénylő problémák II.: Végtelen szakaszos tizedes törtek. Függvény határértéke a végtelenben. Síkidomok területének kiszámítása. Az integrálszámítás alkalmazásai.

Rendszerező összefoglalás: Implikáció.
Az elektronikus számítógépek működéséről.
Kettes számrendszer, egyéb számrendszerek lehetősége.
Axiómarendszerek.

— A 76. oldalon található „Koordináta-geometria" című fejezetben kiegészítő anyag: Adott ponton átmenő, adott normálvektorú egyenes egyenlete. Adott egyenes által létrehozott félsíkok jellemzése egyenlőtlenségekkel. Egyenesszakaszok és félegyenesek által határolt tartományok jellemzése egyenlőtlenség-rendszerekkel. Tartományok jellemzése (kör esetében). A lineáris programozás néhány problémája (egyszerű példákon bemutatva).

— A 66. oldal alján és a 67. oldal első soraiban a $\sqrt{x}$ függvény szerepel.

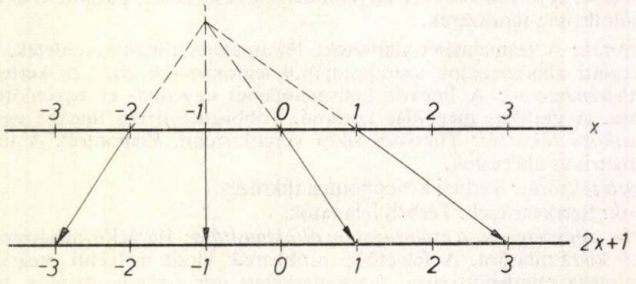
— A 68. oldalon az üresen maradt betűhelyekre α görög betű kerül.

— A 68. oldal alulról 11. sorában helyesen a $0°<\alpha<90°$ egyenlőtlenség szerepel.

— A 73. oldalon felülről a 10. sorban az $\cup$, $\cap$, $\setminus$ halmazműveletek szerepelnek.

— A 75. oldalon alulról a 2. sorban helyesen „Az 5; 4; 4; 3 óratervet..."

— A 80. oldalon az $x \to 2x+1$ függvény nyíldiagramos képe a következő:



— A 80. oldalon alulról a 14. sorban az $[x]$, $\{x\}$, sgn x függvények szerepelnek.

— A 86. oldal felülről 2. sorában a zárójelben és utána: „(ami nem zárja ki azt, hogy az illető dologról formálisan szó volt) érthetetlenné válik a végeredmény. Ez a tanításban fellépő absztrakciós lánc..."

— A 86. oldalon felülről a 12. sorban helyesen: „Ilyen témakör például a kombinatorika. Az anyagban explicit módon nem szerepel a kombinatorika, de..."

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74. IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is! Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő második számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

867. Oldjuk meg a

$$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x = 0$$

egyenletet!

Bagi Gábor, Barcs

868. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2+(x+1)^2=y^2$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

869. Igazoljuk, hogy az

$$a^n+b^n \leqq \left(b+\frac{a^n}{nb^{n-1}}\right)^n$$

egyenlőtlenség azonosan teljesül, ha $a \geqq 0$, $b>0$, $n \geqq 1$.

Róka Sándor, Tiszavasvári

870. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög oldalai a, b, c, a megfelelő súlyvonalak s_a, s_b, s_c, és a háromszög területe t, akkor teljesül a

$$\frac{6t}{\sqrt[3]{abc}} \leqq s_a+s_b+s_c$$

egyenlőtlenség!

871. Adott a derékszög egyik szárán két pont, A és B (B van közelebb a derékszög csúcsához). Szerkesszük meg a derékszög másik szárán az X pontot úgy, hogy $BXA\sphericalangle = 2 \cdot BAX\sphericalangle$ legyen!

872. Az a élű szabályos oktaédert vetítsük egy síkra! Mekkora az élek vetületének négyzetösszege?

Feladatmegoldások (855—860.)

855. Oldjuk meg egész számokban az

(1) $$x(x+y)(x+2y)=z^2$$

(2) $$x(x+y)(x+2y)(x+3y)=z^3$$

egyenletrendszert!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

Megoldás: Tegyük fel, hogy az $(x; y; z)$ egész számokból álló számhármas kielégíti az adott egyenletrendszert. Akkor (2) bal oldalának első három tényezője helyett z^2-et írva teljesül a

$$z^2(x+3y)=z^3,$$

illetve a vele ekvivalens

$$z^2[z-(x+3y)]=0$$

egyenlet. Ennek igaz voltából következik, hogy

$$z=0 \quad \text{vagy} \quad z=x+3y \quad \text{érvényes.}$$

a) A $z=0$ esetben az (1) az

$$x(x+y)(x+2y)=0$$

alakot ölti, és ebből $x=0$, vagy $x=-y$, vagy $x=-2y$ adódik.

Az első esetben az $(x; y; z)$ számhármas első és harmadik elemére 0-t kaptunk. Ezeket (1)-be és (2)-be helyettesítve látjuk, hogy y tetszőleges egész szám lehet: $(0; y; 0)$ megoldás.

A második esetben az $(x; y; z)$ számhármasra $(-y; y; 0)$ adódik, ezt (1)—(2)-be írva világos, hogy tetszőleges egész y mellett teljesül az egyenletrendszer.

A harmadik eset az előzőhöz hasonlóan a $(-2y; y; 0)$ megoldást szolgáltatja, tetszőleges egész y-nal.

A három talált megoldásnak egyetlen közös eleme a triviális (0; 0; 0) számhármas.

A $z=0$-t (2)-be írva azt még $x=-3y$ is kielégíti, de ebből nem nyerünk az (1)-nek is eleget tevő újabb számhármast.

b) A $z=x+3y$ (1)-be való helyettesítése arra vezet, hogy teljesül az

$$x(x+y)(x+2y) = (x+3y)^2,$$

illetve a belőle polinommá alakítással nyert

$$x^3+3x^2y+2xy^2-x^2-6xy-9y^2 = 0$$

egyenlet. Ez y-ban másodfokú:

$$(2x-9)y^2+(3x^2-6x)y+x^3-x^2 = 0$$

(hiszen $2x-9$ páratlan lévén nem lehet nulla), tehát y-ra érvényes, hogy

$$y = \frac{6x-3x^2\pm\sqrt{x^2(x^2+8x)}}{2(2x-9)} = x\,\frac{6-3x\pm\sqrt{x^2+8x}}{2(2x-9)}. \tag{3}$$

Feltevésünk szerint x és y egész, de akkor — ismert tétel értelmében — x^2+8x négyzetszám, azaz egész e-vel igaz az

$$x^2+8x = e^2$$

állítás. Ez x-ben másodfokú, ennélfogva

$$x = -4\pm\sqrt{16+e^2} \tag{4}$$

érvényes. Ebből következik, hogy egész f-fel teljesül a

$$16+e^2 = f^2$$

egyenlet. Ennek

$$(f+e)(f-e) = 16$$

alakjából $f+e$-re és $f-e$-re egyenletrendszereket kapunk a 16 tíz osztópárjával. Ezekből $(e; f)$-re a (3; 5), (0; 4), (−3; 5), (−3; −5), (0; −4) és (3; −5) egész megoldásokhoz jutunk. Ezekből x-hez a (4)-ben csak f-re van szükség:

$$x = -4\pm|f|,$$

azt kapjuk, hogy x csak 0; 1; −9 vagy −8 lehet; (3)-ból pedig y-ra rendre ezeket kapjuk: 0; 0; 6 és 5; és −8-hoz nem tartozik egész y. A $z=x+3y$ egyenletből végül a (0; 0; 0), (1; 0; 1), (−9; 6; 9) és (−9; 5; 6) számhármasokhoz jutunk. Az elsőt *a*) alatt már megkaptuk, újabb megoldás már csak a többi három számhármas lehet. A behelyettesítés azt mutatja, hogy valóban megoldások. Ezzel az összes megoldást megtaláltuk.

Bartha Gábor, Szentendre, Kishalmi Rózsa, Szeged
és Óvári Lajos, Kecskemét

Megoldók száma: 11.

856. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x} \tag{1}$$

függvényhatárértéket!

Szalai Istvánné, Bicske

Megoldás: Az exponenciális függvényt az elemi matematikában pozitív alap mellett definiáljuk, ezért az a, b, c, d paramétereket pozitívaknak vesszük. Az (1) alatti tört ezenfelül akkor és csak akkor ad meg függvényt, ha $c\neq d$, ezért ezt is feltesszük. Az így megadott függvény értelmezési tartománya a 0-tól különböző számok halmaza.

Ismert tételek szerint az exponenciális függvények határértéke a 0 helyen 1, ennek alapján az (1) alatti tört számlálójának és nevezőjének határértéke egyaránt 0 a 0 helyen. Minthogy a számlálót és a nevezőt könnyű differenciálni, ezért alkalmazzuk a l'Hospital-szabály néven ismert tételt: ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható az α hely egy pontozott környezetében, és itt $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$, továbbá

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta, \quad \text{akkor} \quad \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

(Az α szám δ sugarú pontozott környezetén az $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ intervallumot értjük, kivéve belőle az α helyet.)

A feltételek teljesülését sorban ellenőrizhetjük. A $g'(x)\neq 0$ feltétel vizsgálatakor vegyük figyelembe, hogy c és d közül pontosan az egyik lehet 1, és ez esetben a másik exponenciális függvény deriváltja a 0 bármilyen pontozott környezetében 0-tól különböző; ha pedig egyik sem 1, akkor $c\neq d$ lévén a

$$c^x \ln c = d^x \ln d,$$

illetve a vele ekvivalens

$$\left(\frac{c}{d}\right)^x = \frac{\ln d}{\ln c}$$

egyenletnek vagy nincs megoldása (ha a jobb oldal negatív), vagy pedig egy megoldása van, de akkor a pontozott környezetet választhatjuk úgy, hogy ez a hely ne essék bele. Az utolsó feltétel vizsgálata:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a^x-b^x)'}{(c^x-d^x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{c^x \ln c - d^x \ln d} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln c - \ln d} = \frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln \frac{c}{d}}.$$

A tételben β-val jelölt határérték létezik, ennélfogva

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{c^x-d^x} = \frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln \frac{c}{d}}.$$

Megoldók száma: 25.

857. Oldjuk meg x-re a következő egyenletet!

(1) $$2\cos x(16\cos^5 x - 16\cos^2 x \sin^3 x - 24\cos^3 x +$$

$$+12\cos^2 x \sin x + 12\sin^3 x + 9\cos x - 9\sin x) - 1 = \sqrt{2}\cos nx.$$

Filakovszky Péter, Érsekújvár

Megoldás: Adjunk (1) mindkét oldalához 1-et, és a zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$2\cos x[16\cos^2 x(\cos^3 x - \sin^3 x) - 12(\cos^3 x - \sin^3 x) -$$

$$-12\cos^2 x(\cos x - \sin x) + 9(\cos x - \sin x)] = 1 + \sqrt{2}\cos nx,$$

$$2\cos x[(\cos^3 x - \sin^3 x)4(4\cos^2 x - 3) - (\cos x - \sin x)3(4\cos^2 x - 3)] = 1 + \sqrt{2}\cos nx.$$

$$2\cos x(4\cos^2 x - 3)(4\cos^3 x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 3\sin x) = 1 + \sqrt{2}\cos nx.$$

Szorozzuk meg $\cos x$-szel tagonként a $4\cos^2 x - 3$ összeget; észrevehetjük, hogy alkalmazni lehet a $\sin 3x$-re és $\cos 3x$-re ismert azonosságokat:

$$2\cos 3x(\cos 3x + \sin 3x) = 1 + \sqrt{2}\cos nx.$$

Szorozzunk be $2\cos 3x$-szel:

$$2\cos^2 3x - 1 + \sin 6x = \sqrt{2}\cos nx.$$

A bal oldali első két tag összege azonosan egyenlő $\cos 6x$-szel, ezáltal a

$$\cos 6x + \sin 6x = \sqrt{2}\cos nx$$

egyenlethez jutottunk. Mindkét oldalt $\sqrt{2}$-vel osztva ezt kapjuk:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right) = \cos nx.$$

Redukáljuk 0-ra és a cosinuskülönbséget alakítsuk szorzattá:

$$(2) \qquad -2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-6x+nx\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-6x-nx\right)=0.$$

A (2) ekvivalens (1)-gyel, továbbá (2) akkor és csak akkor teljesül, ha legalább az egyik sinusérték 0, azaz, ha

$$\frac{\pi}{8}-3x+\frac{n}{2}x=\pi k \quad \text{vagy} \quad \frac{\pi}{8}-3x-\frac{n}{2}x=\pi l$$

teljesül (k, l tetszőleges egész szám). Ezekből az

$$(3) \qquad x\left(\frac{n}{2}-3\right)=\pi k-\frac{\pi}{8},$$

$$(4) \qquad x\left(\frac{n}{2}+3\right)=\frac{\pi}{8}-\pi l$$

egyenleteket kapjuk.

A (3)-nak $n=6$ esetén nincs megoldása, mert a jobb oldal különbözik 0-tól. Az $n\neq 6$ értékekre a

$$\frac{\pi(1-8k)}{4(6-n)} \quad k\in E$$

számok megoldásai, és ezek (1)-et is kielégítik.

A (4)-nek $n=-6$ esetén nincs gyöke, az $n\neq -6$ értékekre a

$$\frac{\pi(1-8l)}{4(6+n)} \quad l\in E$$

számok a megoldásai, és ezek (1)-nek is eleget tesznek.

Ezzel (1) összes megoldását megkerestük.

Bencze Mihály, Kolozsvár, Fehér József, Csongrád, Szánthó Gyula, Gyula és Zsidó Donát, Brassó

Megoldók száma: 13.

858. Valaki egy $P_n(x_n, y_n)$ (n pozitív egész szám) pontsorozatról a következőket árulja el:

a) a P_1 pont koordinátái relatív prím pozitív egészek;

b) a P_n pont koordinátáira, ha $n>1$, teljesülnek:

$$x_n = kx_{n-1},$$

$$y_n = -ky_{n-1};$$

c) a k állandó pozitív egész szám;

d) minden pozitív egész n-re érvényes:

$$P_nP_{n+1} = 4k^n\cdot\sqrt{x_1y_1}.$$

Van-e ilyen pontsorozat?

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: Tegyük fel, hogy a P_n pontsorozat kielégíti a feltételeket, akkor *b*) alapján a sorozat elemeit így írhatjuk fel:

$$P_1(x_1; y_1),\ P_2(kx_1; -ky_1),\ P_3(k^2x_1; k^2y_1),$$

$$P_4(k^3x_1; -k^3y_1),\ \ldots,\ P_n(k^{n-1}x_1; (-k)^{n-1}y_1),\ \ldots.$$

Ha $k=1$, akkor a sorozat oszcillál az $(x_1; y_1)$ és az $(x_1; -y_1)$ pont között. Ha $k>1$, akkor a páratlan indexű tagok koordinátái az előző páratlan indexű tag koordinátáiból k^2-tel való szorzással jönnek létre, tehát rajta vannak az OP_1 félegyenesen (O az origó). A páros indexű tagokról hasonlóan lehet belátni, hogy az OP_2 félegyenesen vannak rajta.

A *d*) feltételre alkalmazhatjuk a távolságképletet az (1) előállítással:

$$(2) \qquad 4k^n\cdot\sqrt{x_1y_1} = \sqrt{(k^nx_1-k^{n-1}x_1)^2+[(-k)^ny_1-(-k)^{n-1}y_1]^2}.$$

(Ha (2)-t egyenletnek fogjuk fel, akkor háromismeretlenű, de csak pozitív egész megoldásokat keresünk, sőt az *a)* feltétel további korlátozást jelent.) A (2) mindkét oldalát oszthatjuk k^{n-1}-nel, és négyzetre emelés a

$$16k^2x_1y_1 = (k-1)^2x_1^2+(k+1)^2y_1^2$$

egyenletre vezet. Ennek oldalait x_1^2-tel osztva $\frac{y_1}{x_1}=m$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$(k+1)^2m^2-16k^2m+(k-1)^2 = 0.$$

Ennek teljesüléséből következik, hogy az m pozitív racionális számra

$$m = \frac{8k^2 \pm \sqrt{64k^4-(k^2-1)^2}}{(k+1)^2} \tag{3}$$

igaz.

Ha $k=1$, akkor ebből $m=4$ adódik, és az $\frac{y_1}{x_1}=4$ egyenlet relatív prím pozitív egészekkel csak $x_1=1, y_1=4$ mellett érvényes.

A $P_1(1;4)$, $P_2(1;-4)$, $P_3(1;4)$, $P_4(1;-4)$, ..., $P_n(1;(-1)^{n-1}\cdot 4)$, ...

pontsorozat az *a)*—*d)* feltételek mindegyikét kielégíti, tehát a feladat kérdésére a válasz igenlő.

A (3)-ból további megoldás is adódhat, az összes megoldás megkeresése nehéz feladatnak látszik.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely és Kamarás Lajos, Pécs

Megoldók száma: 5.

859. Bizonyítsuk be, hogy a parabolaszelet területe $\frac{2}{3}$-része azon háromszög területének, amelyet a húr és a végpontjaihoz tartozó parabolaérintők zárnak közre!

Megoldás: A tétel Arkhimédésztől származik, aki intuitív érintő-, terület-, végtelen sor fogalommal dolgozva, sokszor mechanikai analógiákat felhasználva bizonyította sejtéseit. A feladat állítását mai pontosabb fogalmaink és tételeink segítségével például a következő módon bizonyíthatjuk:

A $2py=x^2$ parabola (ez minden parabolát magában foglal) két pontja legyen $P_1(x_1;y_1)$ és $P_2(x_2;y_2)$, ahol $x_2>x_1$ (1. ábra). A P_1, illetve P_2 pontbeli érintő egyenlete

$$p(y+y_1) = xx_1, \tag{1}$$

$$p(y+y_2) = xx_2. \tag{2}$$

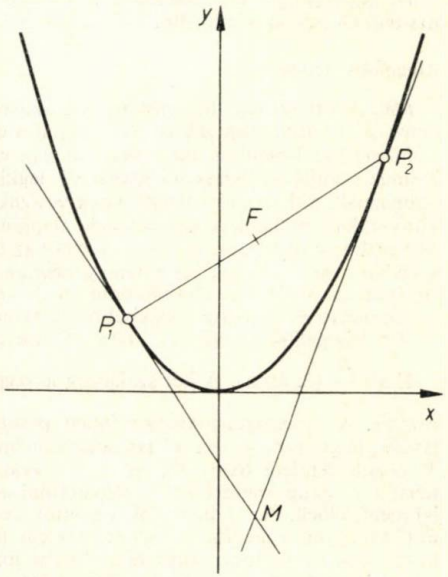
A két érintő $M(\xi, \eta)$ metszéspontjának ordinátáját megkaphatjuk úgy, hogy (1) oldalait x_2-vel, (2) oldalait pedig x_1-gyel szorozzuk. Így módon $\eta=\frac{x_1x_2}{2p}$-hez jutunk. Mivel x_1 és x_2 közül az egyik biztosan különbözik 0-tól, az ezt tartalmazó egyenletből kapjuk:

$$\xi = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Behelyettesítve (1)-be és (2)-be azt találjuk, hogy a metszéspont mindig létezik.

Az M-re kapott eredmény azt jelenti, hogy a P_1P_2M háromszögnek az M-hez tartozó súlyvonala egyállású a parabola tengelyével, hiszen a P_1P_2 szakasz F felezőpontja: $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Ennek alapján a P_1P_2M háromszög T területét megkaphatjuk úgy, hogy az említett súlyvonal által adott egyik részháromszög területének kétsze-



1. ábra

resét vesszük. A súlyvonal hossza:

$$\frac{y_1+y_2}{2}-\eta=\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x_1x_2}{2p}.$$

Ha ugyanis x_1 és x_2 egyike 0, akkor $\eta=0$; ha egyező előjelűek, akkor a pozitív η-t ki kell vonnunk; ha ellenkező előjelűek, akkor a negatív η ellentettjét kell hozzáadnunk F mindig pozitív ordinátájához. A részháromszögnek a súlyvonalhoz tartozó magassága $\frac{x_2-x_1}{2}$, ennélfogva

$$T=2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x_1x_2}{2p}\right)\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{1}{8p}(x_2-x_1)^3. \tag{3}$$

A parabolaszelet területének meghatározásához vegyük figyelembe, hogy az $\frac{1}{2p}x^2$ függvény minden $(x_1; x_2)$ intervallumra Riemann szerint integrálható, a függvény nem-negatív, ezért ismert tétel szerint létezik a parabola alatti tartománynak Jordan-féle területe, és ez az érték

$$\frac{1}{2p}\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx=\frac{1}{6p}(x_2^3-x_1^3).$$

Minthogy a P_1P_2 szakasz alatti tartomány trapéz, és belőle a parabola alatti tartományt elhagyva áll elő a parabolaszelet, ezért a parabolaszeletnek is létezik Jordan-féle területe (T_{sz}), és ezt kapjuk rá:

$$T_{sz}=\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)-\frac{1}{6p}(x_2^3-x_1^3)=\frac{1}{12p}(x_2-x_1)^3. \tag{4}$$

A (3) és (4) alatti eredmények mutatják, hogy $T\cdot\frac{2}{3}=T_{sz}$ igaz.

I. megjegyzés: A tétel bizonyítása megtalálható a következő műben: Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei, II. kötet 15. oldal (Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Bp. 1951.). A bizonyítás a legfeljebb harmadfokú polinomra levezetett Simpson-formulára támaszkodik.

II. megjegyzés: Arkhimédész bizonyítását közli a következő mű: Dörrie: A diadalmas matematika, Gondolat Kiadó, Bp. 1965. 258—261. példa.

Vermes Miklós, Budapest

Megoldók száma: 22.

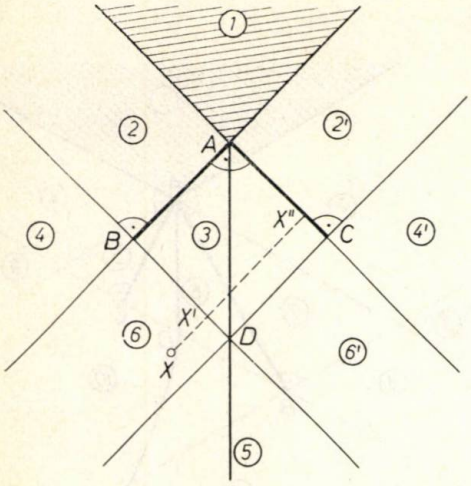
860. Adott az ABC háromszög. Mi azoknak a pontoknak a halmaza a háromszög síkjában, amelyek a háromszög AB és AC oldalától egyenlő távolságra vannak?

Megoldás: Ismeretes, hogy egy pontnak egy ponthalmaztól mért távolságán a pontot a ponthalmaz pontjaival összekötő szakaszok legkisebbikének hosszát értjük; ha a pont eleme a ponthalmaznak, akkor a távolságot 0-nak vesszük (ilyenkor néha azt mondjuk, hogy a legkisebb összekötő szakasz nullszakasz). E definíció alapján a P pont távolsága az UV szakasztól — a továbbiakban csak egy síkra szorítkozva — a P-ből az UV-re bocsátott merőleges szakasz hossza, ha P abban a sávban van, amelynek két határegyenese az U-ban és V-ben az UV-re állított u, illetve v merőleges egyenes; ha pedig P az előbbi sávon kívül van, az u, illetve v határegyenesű félsík belsejében, akkor a PU, illetve PV szakasz a legkisebb összekötő szakasz.

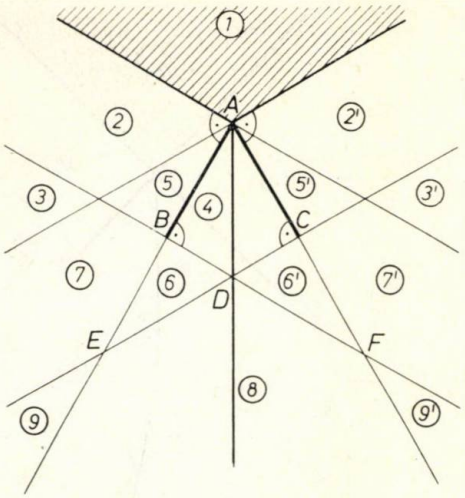
*A)** Vizsgáljuk először az $AB=AC$ esetét!

I. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (2. ábra). A két szakaszra a végpontokban állított merőlegesek a síkot 9 tartományra osztják. Az ① szögtartomány minden pontja hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz. Könnyen látszik, hogy a ②, ④, ②′, ④′ tartományok belső pontjai nem megfelelőek. Ha ⑥ egy belső pontja X, ennek vetülete BD-n X', AC-n X'', akkor $XB<XX'+X'B<XX'+BD=XX'+X'X''=XX''$, tehát ⑥ — és ugyanezért ⑥′ — belső pontjai sem jók. A ③ belső pontjai közül az AD szakasz pontjai megfelelőek. Az ⑤-ben azok a pontok rendelkeznek a keresett tulajdonsággal, amelyek B-től és C-től egyenlő távolságra esnek: ezek egy félegyenest alkotnak. A kilenc tartomány határpontjai közül csak az ① határpontjai és a D pont jók. A továbbiakban a fogalmazás rövidítése érdekében a határpontokról külön nem teszünk említést, csak az eredményt közöljük.

Tehát a keresett ponthalmaz az ① tartomány és az A kezdőpontú AD félegyenes pontjaiból áll.



2. ábra



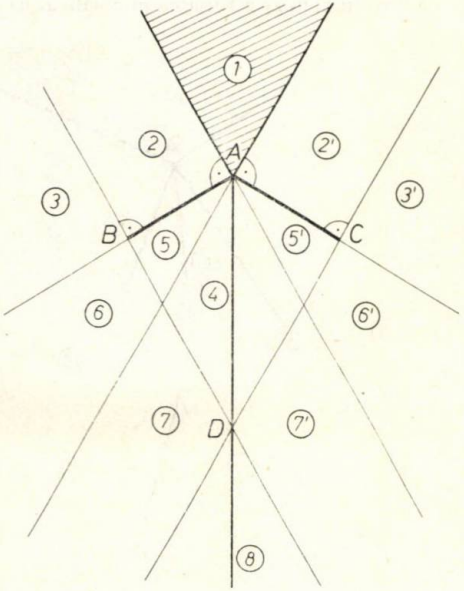
3. ábra

II. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (3. ábra). Az ①pontjai megfelelnek, könnyű látni, hogy ②, ③, ⑤, ⑦ és ⑨-ben nincs jó pont (pl. ⑦ pontjai azért nem, mert tompaszögű háromszögben a tompaszöggel szemközti oldal a legnagyobb). A ⑥-ban azokat a pontokat keressük, amelyek B-től és az AC egyenestől egyenlő távol vannak. Az egész síkon e pontok halmaza a B fókuszú, AC direktrixű parabola (a továbbiakban ilyen esetben $(B; AC)$ parabolát mondunk). Ennek egyik pontja D. Mivel α hegyesszög és $AB=AC$, ezért A és C a parabola t tengelyének más-más pontján vannak. $CD \perp AC$, ennélfogva a CD és t határolta sávban levő parabolaív a BD egyenes A-t tartalmazó félsíkjában van. Ezek miatt ⑥-ban — és ugyanígy ⑥′-ben is — D az egyetlen jó pont. A ④-ben az AD szakasz; a ⑧-ban a BC szakasz felezőmerőlegesének D „alatti" félegyenese tartozik a keresett ponthalmazhoz. Eredményünk ugyanolyan, mint az I. esetben.

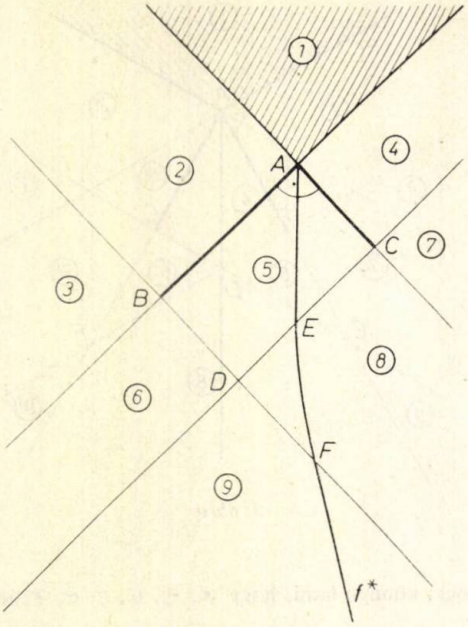
III. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ (4. ábra). A II. esethez hasonló vizsgálat (pl. ⑦-ben a $(B; AC)$ parabolával kapcsolatban ugyanolyan ponthalmazt szolgáltat.

B)* Nézzük most az $AB>AC$ esetet!

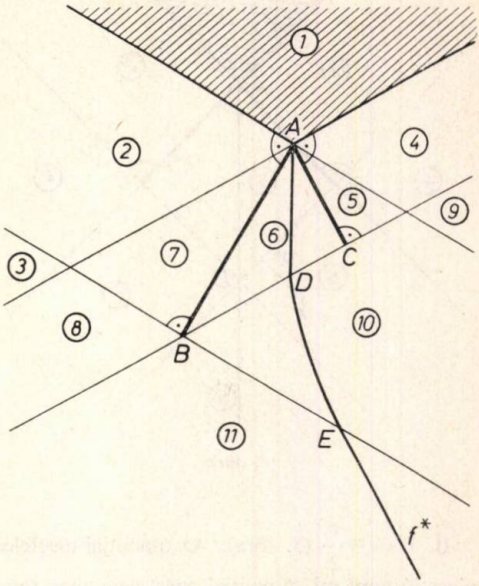
I. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (5. ábra). Az ① pontjai megfelelőek, ②, ③, ④, ⑦ pontjai nem; ⑤-ben az AE szögfelező szakasz pontjai a jók (E a CD szakasz belső pontja). A ⑨-ben azokat a pontokat keressük, amelyek a B és a C ponttól egyenlő távol vannak. A feltevések miatt $CD>BD$, ezért D a BC szakasz f felezőmerőlegesétől „balra", a B-t tartalmazó félsíkjának belsejében van. Itt f a BD szakasz D-n túli meghosszabbítását a D-től különböző F-ben metszi, és ⑨-ben egy F kezdőpontú f^* félegyenes pontjai a megfelelőek. A ⑥-ban azok a pontok lennének jók, amelyek B-től és az AC egyenestől egyenlő távol vannak. Minthogy $DB<DC$, ezért D belső pontja a parabolának, és a BD szakasz pontjai is ilyenek. Tehát ⑥-ban nincs jó pont. A ⑧-ban azok a pontok lehetnek megfelelőek, amelyek C-től és az AB egyenestől vannak egyenlő



4. ábra



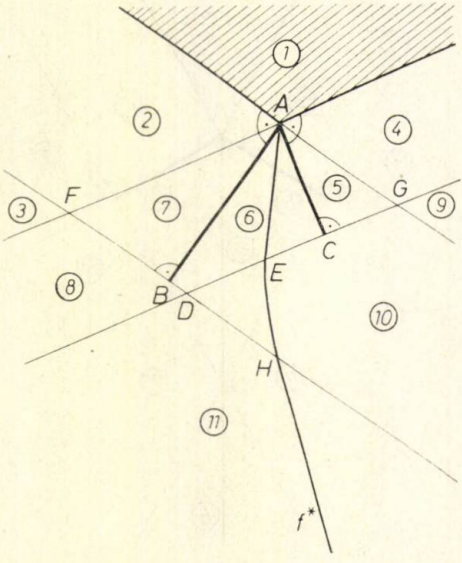
5. ábra



6. ábra

távol. A $(C; AB)$ parabolának E és F biztosan pontja, tehát a parabola tulajdonsága miatt az EF parabolaív pontjai a keresett pontok.

Azt kaptuk, hogy a kérdéses ponthalmaz az ① szögtartomány, az AE szakasz, az EF parabolaív és az f^* félegyenes egyesítése.



7. ábra

II. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Itt három alesetet veszünk figyelembe aszerint, hogy γ derékszög-e, vagy kisebb, illetve nagyobb nála.

II.$_1$ $\gamma=\frac{\pi}{2}$ (6. ábra). A ②, ③, ④, ⑤, ⑦, ⑨-ben nincs jó pont; a ⑥-ban az AD szögfelező szakasz pontjai a jók, a ⑪-ben az f^* félegyenes pontjai. Az ① minden pontja megfelel. A ⑧-ban a $(B; AC)$ parabola pontjai volnának jók, de egyik pontja sem esik ide. A ⑩-ben a $(C; AB)$ parabola DE ívének pontjai a jók. Az eredmény hasonló a $B)^*$ I.-éhez.

II.$_2$ $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ (7. ábra). Az ①-nek minden pontja jó, a ②, ③, ④, ⑤, ⑦ és ⑨-ben nincs jó pont. A ⑥ húrnégyszög, a körülírt kör középpontja az AD szakasz felezőpontja. Minthogy $AB>AC$, ezért — AC-nek AD-re való tükrözéséből láthatóan — $BD<CD$, ebből pedig (mivel nagyobb húrhoz nagyobb középponti szög tartozik) következik: $CAD\sphericalangle > BAD\sphericalangle$. Emiatt az α szögfelezője

a CD szakaszt az E belső pontban metszi, és a jó pontok éppen az AE szakasz pontjai. A ⑧-ban azok a pontok lehetnek jók, amelyek $(B; AC)$ parabolán vannak. A $BD<CD$ miatt D belső pontja a parabolának, az $FB<FA$ következtében pedig (hiszen az ABF háromszög derékszögű) az F is belső pont, de akkor az FD szakasz minden pontja az, és az AC-re merőlegesen FD-n kezdődő, ⑧-ban haladó félegyeneseknek a pontjai is belső pontok, azaz ⑧-ban nincs jó pont. A ⑩-ben a $(C; AB)$ parabola pontjai lehetnek jók. E parabolának a D külső, a G pedig belső pontja. Ezért a DG szakaszon egyetlen parabolapont van. De az E jó pont, tehát ez az a parabolapont. Minthogy a BD egyenes párhuzamos a parabola tengelyével, ezért a BD-nek a D kezdőpontú, B-t nem tartalmazó félegyenesén egyetlen parabolapont van, legyen az H. A parabola tulajdonsága miatt ⑩-ben ennek a parabolának EH íve van. A ⑪-et nézve H egyenlő távol van B-től és C-től, ezért a BC szakasz f felező merőlegese átmegy rajta. Mivel BD és CD hegyesszöget zár be BC-vel, ezért f egy-egy pontban metszi őket, mégpedig a BD-t H-ban. A jó pontok itt f-nek a H kezdőpontú f^* félegyenesét alkotják. Az eredmény ugyanolyan, mint $B)^*$ I.-ben.

II.$_3$ $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$ (8/*a*, *b*, *c* ábra). Az ① minden pontja jó, a ②—⑤, ⑦, ⑨, ⑫, ⑬-ban nincs jó pont. A ⑧-ban a $(B; AC)$ parabola pontjai lennének jók, de D és E belső pont, ezért ⑧ minden pontja az. A ⑥-ban az AH szögfelező szakasz a jó pontok halmaza.

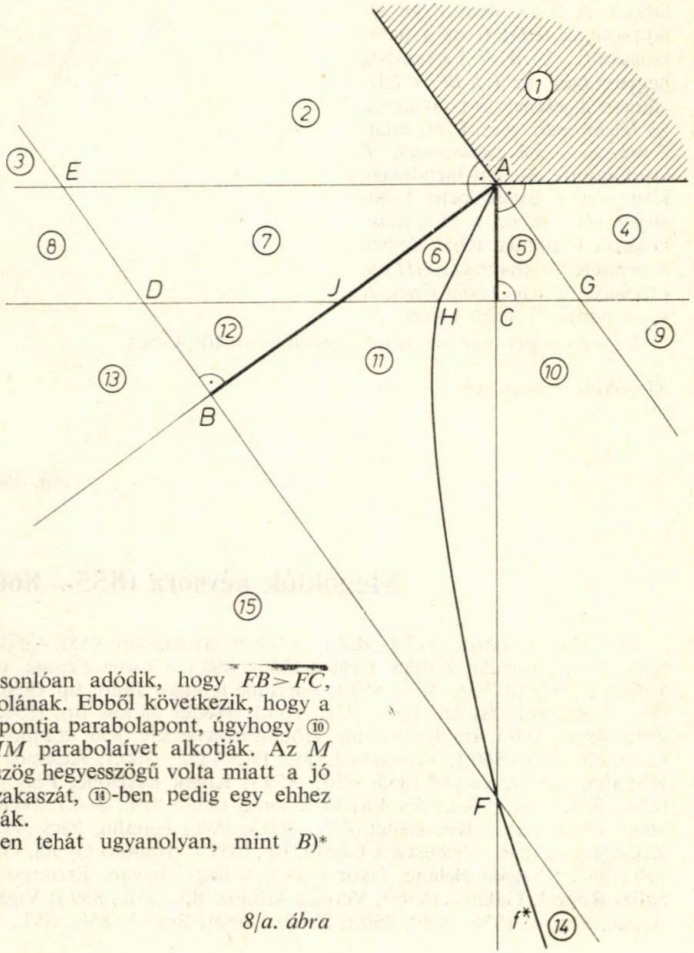
A ⑩-ben és a ⑪-ben a $(C; AB)$ parabola pontjai a jók; a G ennek belső pontja. A 8/*a*, *b*, *c* ábrák három esetet tüntetnek fel: $BJ=JC$, $BJ>JC$, illetve $BJ<JC$. $\left(BJ=c-\frac{b}{\cos\alpha},\ JC=b\cdot\operatorname{tg}\alpha.\right)$

Az *a*) esetben $BF=FC$, azaz F parabolapont, ezért ⑩-ben és ⑪-ben a jó pontok az FH parabolaívet alkotják. Minthogy ez esetben a BC szakasz felezőmerőlegese éppen FJ, ezért ⑭-ben a jó pontok FJ-nek azt a félegyenesét alkotják, amelynek kezdőpontja F, és nem tartalmazza J-t. Ebből az is következik, hogy ⑮-ben csak az F pont jó.

A *b*) esetben $BJ>JC$. A közös átfogójú FJB és FJC derékszögű háromszögekben az FJ-re vonatkozó tükrözés mutatja, hogy $FC>FB$, azaz F külső pontja a $(C; AB)$ parabolának. Emiatt a CF szakasznak egy belső pontja parabolapont, jelöljük K-val! De a BF félegyenesen is van parabolapont (L). Az L pontja a BC f felezőmerőlegesének. A BCF háromszög hegyesszögű volta azt eredményezi, hogy ⑭-ben a jó pontok az f-nek egy L kezdőpontú f^* félegyenesét alkotják, és hogy ⑮-ben nincs jó pont.

A *c*) esetben a *b*)-hez hasonlóan adódik, hogy $FB>FC$, azaz F belső pontja a parabolának. Ebből következik, hogy a BF szakasznak egy M belső pontja parabolapont, úgyhogy ⑩ és ⑪-ben a jó pontok a HM parabolaívet alkotják. Az M pontja f-nek. A BCF háromszög hegyesszögű volta miatt a jó pontok f-nek ⑮-ben egy szakaszát, ⑭-ben pedig egy ehhez csatlakozó félegyenesét alkotják.

Eredményünk a II.$_3$ esetben tehát ugyanolyan, mint $B)^*$ I.-ben.

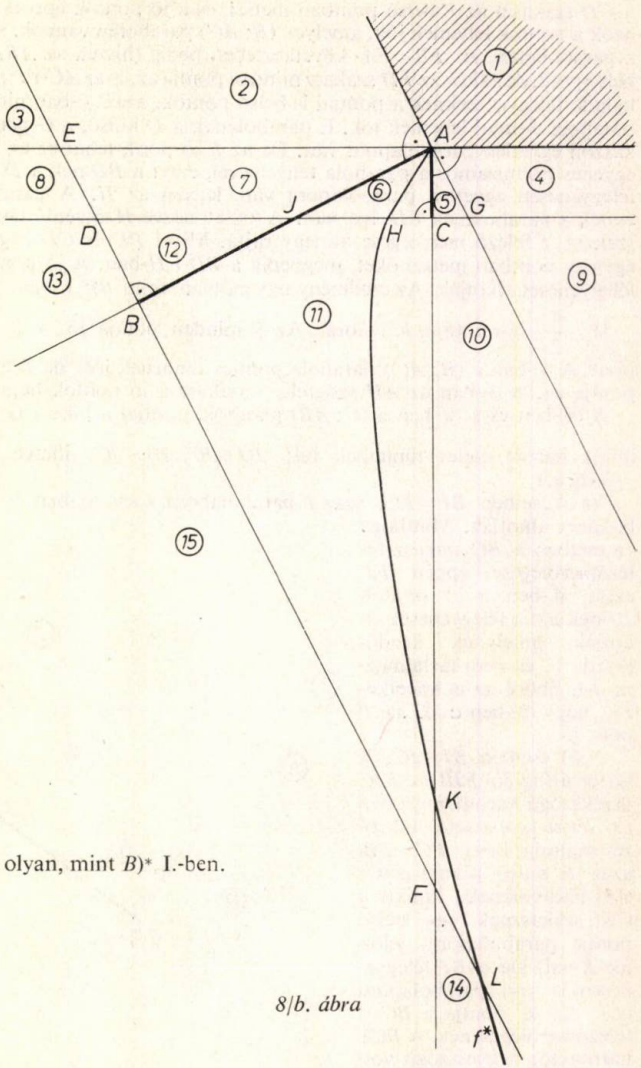


8/a. ábra

III. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ (9. ábra). Az ① pontjai jók. A ②—⑤, ⑦, ⑧, ⑩, ⑪-ben nincs jó pont. A ⑥-ban az α szögfelező szakaszának pontjai a jó pontok. Az ABD és ACF háromszögek hasonlóságából $AB>AC$ folytán $AD>AF$ következik. Ezért α szögfelezője az EF szakaszt annak G belső pontjában metszi. A ⑨-ben a $(B; AC)$ parabola pontjai volnának a jó pontok. A D belső pont; továbbá $EB<EC$ (ez $AB>AC$ következménye), azaz E is belső pont, ennélfogva ⑨ minden pontja az. A ⑫-ben a $(C; AB)$ parabola pontjai lehetnek a jó pontok. Az F belső pont; $EC>EB$ miatt az E külső pont, tehát az EF szakasz belsejében van egyetlen parabolapont. A G azonban ilyen tulajdonságú, tehát G ez a parabolapont. A BCE háromszög hegyesszögű; az E a BC f felezőmerő legesének B-t tartalmazó félsíkjában van. Ezek miatt f metszi a BE egyenesnek E kezdőpontú, B-t nem tartalmazó félegyenesét ennek belső pontjában (H), de ez a H a parabolának is pontja, tehát ⑫-ben a keresett ponthalmaz a GH parabolaív, ⑬-ban pedig f-nek H kezdőpontú f^* félegyenese.

A keresett ponthalmaz most is olyan, mint $B)^*$ I.-ben.

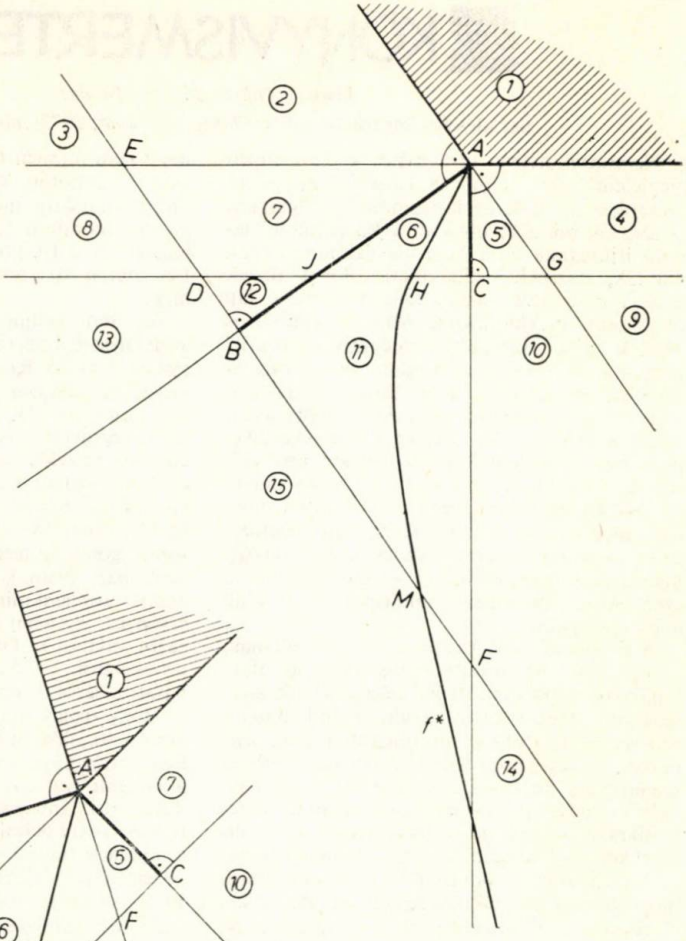
Megoldók száma: 13.



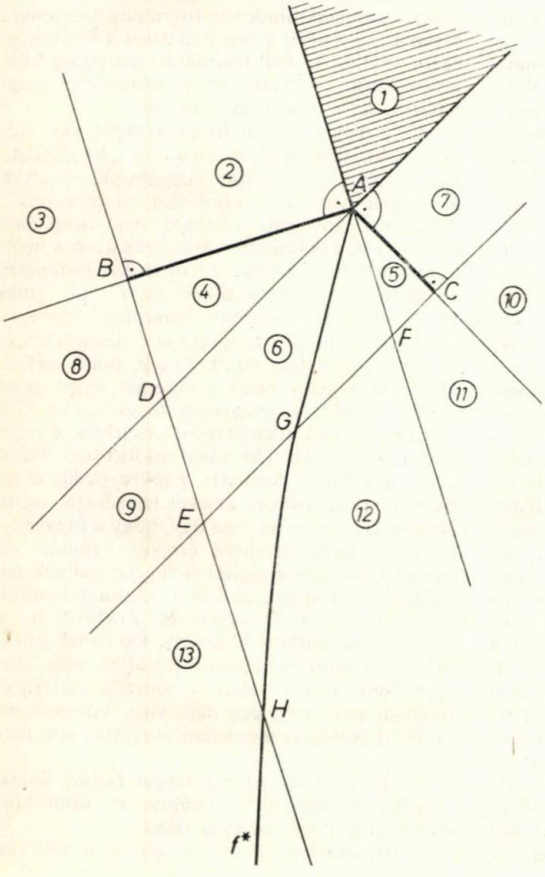
8/b. ábra

Megoldók névsora (855—860.)

Bagi Gábor, Barcs (857.); Bartha Gábor, Szentendre (855—860.); Bencze Mihály, Kolozsvár (856—857.); Bogdán Zoltán, Cegléd (856—860.); Csorba Ferenc, Győr (856., 859., 860.); Fehér József, Csongrád (856., 857., 859.); Füredíné Kondor Judit, Bp. (856.); Halász Ágnes, Pilisvörösvár (855.); Heverdle István, Eger (855., 856.); Hoffer János, Bp. (856., 858., 859.); Horváth Géza, Zseliz (856., 860.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (856. két mód, 859.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (855—860.); Kamarás Lajos, Pécs (855—860.); Kelemen Lajos, Kisvárda (859., 860.); Kishalmi Rózsa, Szeged (855—857., 859.); Kotek Lászlóné, Pécs (856.); Kun Péter, Szentendre (856., 857., 859.); Kurcsics László, Csorna (855., 859., 860.); Nyírő László, Mezőkövesd (856., 860.); Óvári Lajos, Kecskemét (855—860.); Polcz Katalin, Pécs (855—857., 859); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (856.); Sebestyén László, Bp. (859.); Szánthó Gyula, Gyula (855., 856., 857. két mód, 859., 860.); Szigeti Béláné, Győr (859.); Szilágyi István, Esztergom (856., 859. két mód, 860.); Szlizs Róbert, Galánta (856.); Vermes Miklós, Bp. (856., 859.); Vigassy Lajos, Bp. (859.); Wekszli Árpád, Csorna (856., 859., 860.); Zsidó Dónát, Brassó (856., 857., 859.).



8/c. ábra



9. ábra

KÖNYVISMERTETÉS

Jánossy Lajos—Jánossy István:
Szemléletes integrálszámítás *(Tankönyvkiadó, 1977) című könyvről.*

Nemrégen hagyta el a sajtót a fenti címen megjelent könyv mint az 1974-ben megjelent „Szemléletes differenciálszámítás" folytatása. A szerzők mindkét könyvet a középiskolai tanuló ifjúságnak és a középiskolai tanároknak szánták, művükkel didaktikai célokat tűztek maguk elé, ezért méltán számíthatnak e lap olvasóinak érdeklődésére. Mint a címből is kitűnik, mi a „Szemléletes integrálszámításról" kívánunk ismertetést és bírálatot írni, noha ez egyetlen mű második része. Ennek az az oka, hogy az első rész három évvel ezelőtt jelent meg, és értesüléseink szerint a könyvkereskedelemben már nem kapható. A két rész előszavából látszik, hogy a szerzők azonos didaktikai-pedagógiai elvek szerint építették fel mondanivalójukat, a második részre tett megjegyzések az első részre is vonatkoznak. Néha mégis kénytelenek leszünk idézni az első részből, a szemléletes differenciálszámításból is, érveink alátámasztására.

A pedagógiai elv, melyet a szerzők vallanak, szimpatikus; az infinitezimális számítás alapfogalmait természeti, fizikai jelenségekből származtatni, megmutatva azokat a tudományos problémákat, melyek megoldásából ezek sarjadtak. Az is jó, hogy a szerzők a tanulók eleven szemléletére apellálnak, a szemlélet megkönnyíti a megértést és megtanít valamit matematikailag sejteni, amit aztán tiszta racionális érvekkel vagy elfogadunk, vagy pedig elvetünk.

Az előszóban (pontosabban előszavakban) megfogalmazott célkitűzésekkel és didaktikai elvekkel — mint elvekkel — egyetértünk. Nem tudunk azonban szó nélkül elmenni a tárgyalás koncepciója és konkrét menete mellett, melyekkel szemben komoly fenntartásaink vannak.

A határozott integrált a szerzők, mint általában szokásos, a Riemann-féle összegek határértékét definiálják. Jól megválasztott fizikai példákon szemléltetik annak az útnak a lényegét, mely a határozott integrál fogalmához vezet. Aztán általában definiálják a határozott integrált mint az ekvidisztáns felosztáshoz tartozó Riemann-összegek határértékét. Ennek a létezését be is bizonyítja (3. pont) a könyv monoton függvényekre (ismét a szokásos módon). E fejezet végén azt mondják: „Általános esetben a mozgás gyorsuló és lassuló szakaszokból tevődik össze". Később függvényekről van szó, ezekre ez úgy értendő, hogy azok monoton növekvő és csökkenő szakaszokból állanak.

A szerzők sehol sem írják körül, *milyen* függvényekről beszélnek. De még ha folytonos függvényeknél maradunk is, akkor is ismert, hogy nem minden folytonos függvény „tevődik össze" monoton szakaszokból. A 13. oldal utolsó mondata megígéri az olvasónak, hogy a nem monoton függvények integráljának létezését (!) a 10. pontban be fogja bizonyítani. Ezt sem a 10., sem más fejezetben nem teszi meg.

Azt sem tartjuk szerencsésnek, hogy noha a határozott integrált mint ekvidisztáns felosztáshoz tartozó Riemann-összegek határértékét vezeti be, egyszer csak ex cathedra kijelenti (39. oldal, 17—23. sor), hogy „nem lényeges", az integrációs szakaszt egyenlő vagy nem egyenlő részekre osztottuk fel. Honnan tudja ezt? Nincsen az a „szemlélet", amely ezt „nyilvánvalóvá" tenné! Igaz, hogy megemlíti, hogy ez (39. oldal 18—19. sor) „az eddigiekhez hasonló gondolatmenettel belátható". Ez pedig nem igaz! Nem is lehet igaz, mert az állítás csakis majdnem mindenütt folytonos függvényre érvényes, így tehát a bizonyításhoz a folytonosságot valahol ki kell használni, márpedig folytonosságról, — akár annak szemléletes meghatározásáról — egy szó sem esik.

Hogy mégis milyen függvényekről van szó, arról a 40. oldalon (2. sor) azt írja: „Az előzőekben olyan függvényeket vizsgáltunk, amelyek a vizsgált szakaszon sehol sem szingulárisak". Tehát az integrál fogalmát nem-szinguláris függvényekre definiálta. De melyek azok a nemszinguláris függvények? Erről csakis Jánossyék „Szemléletes differenciálszámítása" ad (más könyv ezt a fogalmat kizárólag bizonyos komplex változós függvények megnevezésére tartja fenn) felvilágosítást. Itt a 9. pont „definiálja" (de hogyan, erről is érdemes lenne egyet s mást leírni!) a *szinguláris függvényeket* (22. oldal), és ennek ellentéteként értelmezi a *reguláris* függvényeket (20. oldal, utolsó sor). Tehát nem-szinguláris=reguláris. Ezekre pedig érvényes, hogy „a változó értékét tetszőleges számértékre ki lehet terjeszteni úgy, hogy a függvényértékre mindig értelmes értéket kapunk. Az ilyen függvényeket *reguláris* függvényeknek nevezzük". (20. oldal, alulról 1—3. sor.) Eszerint $f(x)=1$, ha x racionális és $f(x)=0$, ha x irracionális-reguláris függvény. De ennek integrálja (mármint Riemann-integrálja) nem létezik! Nem értem tehát a szerzők okfejtését (hogyan értse meg egy diák vagy középiskolai tanár?)! Nehéz is megérteni olyasmit, ami nem igaz!

Szeretnék más jellegű tárgyi (tehát didaktikailag is fennálló) hibákra is rámutatni, melyeket igen súlyosaknak ítélek.

A 91. oldalon (4—6. sorok) azt a célt tűzi

ki, hogy „hogyan közelíthető egy függvény egy adott szakaszon n-ed fokú hatványfüggvény segítségével", és a 9. sorban „Az általános eljárást *függvények sorfejtésének* nevezik". Hát nem, kérem! A sorfejtés és a függvények approximációja két különböző dolog; igaz, hogy a *konvergens* sorfejtés egyúttal approximációra is felhasználható, de sorba nem fejthető függvény is approximálható, sőt alkalomadtán egyenletesen is, polinomokkal!

A legfelháborítóbb hiba (azt hiszem, ezzel a szerzők világrekordot állítottak) a 22. oldalon van. Itt a $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{e^{B\Delta t}-1}$ határértéket l'Hospital-szabállyal határozzák meg! Szóval kiszámítja e^{Bt} deriváltját, miután ezt már kiszámította, vagy érthetőbben: valamit azzal bizonyít, amit be akar bizonyítani! Pontosan ez az, amire nem szabad tanulókat nevelni!

Eddig csak koncepciózus hibákat említettem, nem akarok minden hibás vagy pongyola megfogalmazást felhozni, hiszen akkor szinte az egész könyvet reprodukálni kellene. Egynéhány dolgot még meg kell említeni.

Szóltunk már arról, hogy milyen jogon használják a szerzők a szakirodalomtól eltérő módon a szinguláris és reguláris függvény fogalmát, azt is zavaros, nem egyértelmű formában. Ugyanúgy érthetetlen, hogy a több évszázados szokással szakítva az arc sin helyett $\sin^{-1}$ jelölést miért kell éppen középiskolában bevezetni. Azért, hogy ne tudják használni a szokásos táblázatokat? De hát joga van új jelölést bevezetni, és vannak valóban komoly érvek a $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ mellett. De akkor már semmilyen joga sincsen $\sin^2 x$-et $(\sin x)^2$ helyett használni (mint ahogyan teszi azt pl. a 120., 79., 70. stb. oldalakon). A kitevő nem jelenthet egyszer hatványt, máskor inverzet (hozzá még: nincs is utalás a szövegben, hogy mikor mit jelent!).

Nem lehet egyetérteni a sok helyen tapasztalható pongyola, magyartalan megfogalmazással, indokolatlan kijelentésekkel (melyek ha igazak is, nincsenek kellően érvekkel alátámasztva). Szemelvényképpen bemutatunk ezekből is (a teljességre ezen a téren nem is lehet törekedni) néhányat:

16. oldal, 6., 7. sor: „Az előzőekben láttuk, hogy függvények integráljának kiszámításához összegek értékeit kell meghatároznunk" (összegek *határértékeit* kell itt meghatározni!)

21. oldal, alulról 4., 5. sor: „Az összegezés abban az esetben is könnyen elvégezhető, amikor a test az időnek *exponenciális függvénye*" (szeretnék látni ilyen testet!)

39. oldal, 2. sor: „Látjuk tehát, hogy az $I^{(n)}$ közelítő összeg a felosztás finomításakor egészen általános feltételek mellett egy határértékhez ... tart." (Ezeket az „általános feltételeket" sehol sem találtam!)

39. oldal, 10—11. sor: Azt állítja, hogy a Riemann-összegben a függvényértéket *bárhol* a részintervallum belsejében lehet képezni, a határérték mindig ugyanaz lesz. Ezt honnan veszi? Tudok ellenpéldát a szerzők által regulárisnak nevezett függvénynél is!

43. oldal, 11. sor: „az integrálást negatív irányban végezzük" (Mit jelent ez? Arab írást használunk?)

52. oldal, alulról 7. sor: „Ilyen kivételes esetekben a Newton—Leibniz-szabály nem alkalmazható" (A felhozott „kivétel" az $-\frac{1}{x}$ függvény. De miért kivétel ez?)

61. oldal, alulról 2. sor: Itt érintő berajzolásáról beszél a könyv, de fel sem merül a szerzőkben, hogy esetleg nincs is érintő? Ugyanez vonatkozik arra, hogy több helyen beszélnek a függvény (így általában) legnagyobb és legkisebb értékéről, holott ilyenek nem mindig léteznek!

65. oldal, alulról 3. sor: „egy kis szakaszon elhanyagolhatóan kis hibát ad" (Mit jelent ez? Mi kicsi és mi nagy?)

Számos helyen olvasható: „Legyen adva egy $f(x)$ függvény..." De milyen? Differenciálható, vagy elég, ha folytonos? (pl. 73. oldal, 9. sor) Ez így nem nevel szigorúan egzakt gondolkodásra!

103. oldal, alulról 8. sor: Hol definiálják a szerzők ezt a kifejezést: „nem változik nagyságrendekkel"? Így a szöveg teljesen érthetetlen!

104. oldal, alulról 5. sor: „természetes alapú exponenciális függvény" (Megfogalmazás! Mi az a természetes alap?)

105. oldal, 4. sor: Miért $R_n(x) \sim \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1}$?

Ezt eddig = jellel jelölték!

115. oldal, 3. sor: „Az egyenlőtlenséget $x-x_0$-val osztva..." Hol van kikötve, hogy $x-x_0 \neq 0$? Ha pedig $x-x_0<0$, akkor az utána jövő képletsor helytelen!

120. oldal, 14., 15. sor: „Így például az $f(x)=\sqrt{1-k\cdot\sin^2 x}$ $(k \neq 1)$ függvény integrálját nem lehet hatványfüggvények, trigonometrikus függvények stb. felhasználásával megadni".

(Dehogynem: az elliptikus függvények analitikusak, hatványsorba fejthetők! Vagy: Fourier-soruk is előállítható! Az már viszont igaz, hogy *véges* sok ilyen függvénnyel nem fejezhető ki! Ezt egy középiskolás diáknak — úgy látszik — ki kell találnia!)

Többnyire kifogásokat említettem, olyasmiket, amivel nem tudok egyetérteni. Szeretném viszont fejtegetésemet egy állítással befejezni, mellyel mélységesen egyetértek. Az előszó végén ezt írják a szerzők: „Könyvünkkel alá kívánjuk támasztani azt a meggyőződésünket, hogy a differenciál- és integrálszámítást középiskolában is lehet tanítani..." Ez bizony igaz, tanítják is, eredménnyel is, csak nem így, ahogyan azt a szerzők ajánlják!

Dr. Fenyő István
egyetemi tanár

3,50 Ft

Megjelent és kapható

az Országos Pedagógiai Intézet Pedagógus Továbbképzés Könyvtára sorozatában *Az eredményesebb középiskolai matematika oktatásért* című kötet. (Cikkgyűjtemény a középiskolai matematikatanárok továbbképzéséhez.) Szerkesztette: Hódi Endre. Budapest, 1977.

A kiadvány 12 cikket tartalmaz. Közülük 8 a gimnáziumok általános, illetve matematika I. szakosított tantervű osztályaiban tanító matematikatanárok 1971. évi nyári továbbképző tanfolyamán elhangzott előadások és gyakorlatok anyagát öleli fel, a többi négy pedig szegedi pedagógusok olyan tantárgypedagógiai munkája, amely országos érdeklődésre tarthat számot.

A kiadvány cikkei olyan kérdéseket tárgyalnak, amelyeknek fontossága és időszerűsége nagyrészt független a tanterv megváltozásától, illetve például a számítástechnika elemeivel foglalkozó határozottan beleilleszkedik az új tantervek irányvonalába.

A kötet ára: 45,— Ft. Könyvárusi forgalomba nem kerül. Megvásárolható, illetve utánvéttel megrendelhető a következő címen: Kondás Barna osztályvezető-helyettes, Országos Pedagógiai Intézet. 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21. A kiadványra különösen a megyei pedagógus továbbképző intézetek (kabinetek) figyelmét szeretnénk felhívni.

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

	Fűzve
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztály matematika oktatásához (52 681)	16,—
Előd Istvánné: Számoljunk együtt 5—6. osztály (52 314)	10,—
Gádorné—Vári: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztályában (92 325)	20,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium I. osztályában a matematika tanításához (92 121)	20,—
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (92 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Szintezési útmutató a 10 121/I-II-III. sz. Matematikai feladatgyűjteményhez. Szerkesztő: Némethy Katalin (92 331)	10,—

Beszerezhetők a
17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.)
44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565